TIDSKRIFT
FÖR
ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1936

TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM G. BORELIUS S. BÅGMAN

J. S. HEDSTRÖM G. STARCK A. WAHLGREN

NITTONDE ÅRGÅNGEN

1936

STOCKHOLM

REDAKTION OCH EXPEDITION: KARLBERGSVÄGEN 16IV

Tidskr. utkommer med fyra 64-sidiga häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2: 50, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 527 55.

Redaktion och expedition: **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16[IV], Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1936

Nittonde årgångens innehåll.

Sid.

Assarsson, G. Die Entstehungsbedingungen der hydratischen Verbindungen im System CaO-Al_2O_3-H_2O etc. (ref. av gradualavh.) 273

Beckman, Anna. Anm. av. R. G. Aitken, J. A. Crowther m. fl. Den stora planen ... 42

— — Anm. av Moseley-Chapple-Larsson, Televisionen av i dag ... 43

Benner, S. Nobelprisen i fysik och kemi 1936 ... 217

— — Anm. av J. Jeans, Genom tid och rum ... 111

Billing, J. Ett bevis för likheten $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ och en generalisering 102

Blom, C. E. Ånm. av F. Kohlrausch, Praktische Physik ... 44

— — Anm. av Hj. Olson, Plan geometri ... 54

Carlson, V. Anm. av Hedström-Öije, Arbetsuppgifter i ekvationslära II ... 121

Comét, S. Ett geometriskt problem — två lösningar ... 249

Dahr, K. Anm. av A. Lindström, Teoretiska grunder för elektrotekniken ... 115

Enskog, D. Anm. av O. Klein, Orsak och verkan ... 196

Falck, E. När kan summan av bråk förkortas? ... 79

Foghammar, E. Beräkning av tredjerötter enbart med hjälp av räknetabeller för realskolan ... 78

v. Friesen, S. Precision Measurements of Electron Wave Spectra (ref. av gradualavh.) ... 59

Frostman, O. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions (ref. av gradualavh.) ... 203

Gellerstedt, S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte (ref. av gradualavh.) ... 55

Grundström, B. Spektroskopische Untersuchungen über die Erdalkalihydride (ref. av gradualavh.) ... 204

Hellström, N. Halogenättiksyror och tioglykolsyra (ref. av gradualavh.) ... 123

Hjalmar, E. Anm. av E. Foghammar, Matematiska skrivningsuppgifter för latingymnasiet ... 53

JENVALL, A. Anm. av K. Lundmark, Livets välde I 46
JUNELL, R. Über die gegenseitige Umlagerung der aci- und nitro-Formen aliphatischer Nitroverbindungen (ref. av gradualavh.) 56
JÖNSSON, E. Anm. av Meddelande från P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavd. Häfte 10 54
KLEIN, O. Anm. av P. Jordan, Anschauliche Quantenmechanik 260
KUUSINEN, J. Wahrscheinlichkeitsberechnungen in der Kraft- und Wärmetechnik (ref. av gradualavh.) 274
LARSSON, L. Om bestämning av värmets mekaniska ekvivalent medelst fallande blyhagel 256
LINDBLAD, B. Anm. av E. och B. Strömgren, Lehrbuch der Astronomie 259
LUNDBERG, J. I. G. — ett blad ur den kemiska industriens historia 176
LUNDBLAD, R. Notis angående Whitings rör 29
— — Anm. av Bruun-Devik, Lærebok i fysikk for realgymnasiet, Mekanikk 271
LUNELL, E. Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel 1, 190
— — Anm. av H. Rademacher o. O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren 261
LÖFGREN, N. Notis över en metod för kvalitativ analys av andra gruppens metaller 258
LÖNNQVIST, C. Anm. av S. Benner, Den moderna fysiken och dess begränsning 114
NILSSON, E. En enkel anordning för mätning av ljudets hastighet i luft 29
NILSSON, G. Ljustekniska definitioner och enheter samt mätmetoder inom fotometrien 85
NILSSON, H. En enkel fallmaskin 28
NORDBERG, ANNA. Anm. av F. A. Osborn, Physics of the Home 117
NORDEFELDT, E. Anm. av Petersson-Ring, Uorganisk Kemi for Mellemskolen 200
NORDHULT, A. De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna I 225
NORDWALL, J. F. Anm. av Friberg-Norgren, Folkskolans naturlära 51
NYSTRÖM, B. E. Anm. av E. Österholm, Matematik för alla .. 49
— — Anm. av A. Bokelid, Lärobok och övningsuppgifter i geometri 119
OLSSON, H. Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel 190
PETRINI, H. Om ekvationen $x^3 + y^3 = z^3$ 73
— — Notis om ekv. $x^2 + ay^2 = z^2$ 77
PETTERSSON, B. Anm. av Duckworth-Harries, The Laboratory Workshop 117

RAMSTEDT, EVA. Skolförsök med Geigers spetskammare 104
— — Anm. av P. Debye Kernphysik och Meitner-Delbrück, Der Aufbau der Atomkerne 112
— — Anm. av A. Liljeström, Teknikens naturvetenskapliga grunder 266
RYDE, N. Ur den nyare isotopforskningen 160
SEDSTRÖM, E. Anm. av Friberg-Norgren, Folkskolans naturlära 50
SJÖSTEDT, C. E. Vändutrymmet för ett åkdon 26
SJÖSTRÖM, M. Anm. av Kosmos, Bd 13 191
SLÄTIS, H. Om Hertz'ska vågors ifrågasatta dispersion i fasta kroppar etc. (ref. av gradualavh.) 124
STARCK, G. Två stökiometriska försök 31
— — Bestämning av vattnets viktsammansättning 108
STOLT, H. Anm. av C. Bergholm, Lärobok i fysik, Allmän fysik 196
SUNDBERG, N. Anm. av Hj. Olson, Algebra för latingymnasiet .. 199
SVENSSON, B. Föreningen i Lund för matem.-naturvetenskaplig undervisning 40
TANDBERG, J. Svenska kondensatorer 35
— — Vinkelns tredelning II 145
— — Anm. av Nordisk Kultur, Mått och vikt 264
TEGNÉR, H. En generalisering av den Euler'ska pentagonaltalsatsen. Ett tillägg 24
WIGERT, S. Ett bevis för satsen $\frac{a_1 + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$ 25
— — En sats om plana kurvor 246
WIGREN, N. Anm. av Cleve-Euler, Kvantitativ kemisk analys.. 118
— — Anm. av Bolin-Gustaver, Handledning i kemisk analys för elementära skolor 201
ÅSTRAND, S. Föreningen för matem.-naturv. undervisning. Årsmötet 1936 36
ÖDBERG, G. Anm. av E. Welter, Populär elektroteknik 47
ÖSTMAN, C. J. Anm. av A. Ångström, Meteorologi 45

Föredrag under hösten 1935 och våren 1936 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 63, 72, 127
Föreläsningar för lärarekand. vid provårslärоverken 1935—36 207
Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser 1935—36 207
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna och fyllnadsprövningarna under 1936: januari (68), mars—april (135), maj (140), augusti (213), november (281).
Provräkning i realexamen v. t. och h. t. 1936 ..... 141, 285

Praktisk realexamen: Uppgifter i fysik v. t. och h. t. 1936 .. 142, 286
» » : Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära v. t. och h. t. 1936 ..... 143, 288
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 64, 129, 208, 261
Gradualavhandlingar (autoreferat): G. Assarsson (273), S. v. Friesen (59), O. Frostman (203), S. Gellerstedt (55), B. Grundström (204), N. Hellström (123), R. Junell (56), J. Kuusinen (274), H. Slätis (124).
Tidskrifter, innehållsöversikter 60, 126
Bokanmälningar: Aitken-Crowther-Thomson, Den stora planen; Moseley-Chapple-Larsson, Televisionen av i dag; Kohlrausch, Praktische Physik; Ångström, Meteorologi; Lundmark, Livets välde; Welter, Populär elektroteknik; Österholm, Matematik för alla; Friberg-Norgren, Folkskolans naturlära; Foghammar, Matematiska skrivningsuppgifter för latingymnasiet; Meddelande om ny materiell från P. A. Norstedt & Söner; Olson, Plan geometri 42
Jeans, Genom tid och rum; Debye, Kernphysik; Meitner und Delbrück, Der Aufbau der Atomkerne; Benner, Den moderna fysiken och dess begränsning; Lindström, Teoretiska grunder för elektrotekniken; Osborn, Physics of the Home; Duckwort and Harries, The Laboratory Workshop; Cleve and Euler, Kvalitativ kemisk analys; Bokelid, Lärobok och övningsuppgifter i geometri för realskolan; Hedström-Öije, Arbetsuppgifter i ekvationslära, Del II 111
Kosmos, Bd 13; Klein, Orsak och verkan i den nya atomteoriens belysning; Bergholm, Lärobok i fysik. Allmän fysik; Olson, Algebra för latingymnasiet; Pettersson og Ring, Uorganisk Kemi for Mellemskolen; Bolin-Gustaver, Handledning i kemisk analys för elmentära skolor 191
Strömgren, Lehrbuch der Astronomie; Jordan, Anschauliche Quantenmechanik; Rademacher-Toeplitz, Von Zahlen und Figuren; Nordisk Kultur, Mått och vikt; Liljeström, Teknikens vetenskapliga grunder; Bruun-Devik, Fysikk for realgymnasiet, Mekanikk 259

Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel.

Av EINAR LUNELL.

Jag skall här behandla det vanligaste av alla konstruktionshjälpmedel, *den jämnbreda linjalen, och visa, att man enbart med dess hjälp,* alltså med användande av dess båda parallella kanter, *kan utföra alla de konstruktioner, som äro möjliga med* (den enkantade) *linjalen och passaren.* (Det är klart, att cirklar endast kunna vara givna eller funna genom sin medelpunkt och radie eller en punkt på periferien.)

Detta i någon mån förbluffande resultat visades av AUGUST ADLER i »Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel», Sitzungsber. d. k. Wiener Akademie der Wiss., 1890.

Först några ord om nomenklaturen. I de tyska läroböckerna [1] användas namnen »Lineal», »Lineal mit zwei parallelen Kanten», »Zweikantenlineal», »Parallellineal», av vilka jag inte kan gilla något. I första fallet måste man då ersätta »linjal» i gruppen »linjal och passare» med »rät linje», vilket väl knappast är lämpligt eller trevligt. Det andra namnet är fullt korrekt, men otympligt i texten, det tredje skulle jag lika gärna ge åt en fast vinkel (vilket ju också är ett tecknarhjälpmedel) och det fjärde är alldeles felaktigt. Med »parallellinjal» mena ju tecknarna en i hörnen rörlig parallellogram, med vilken man bekvämt kan draga *godtyckliga* parallella linjer. Jag har stannat för

[1] F. ENRIQUES, Fragen der Elementargeometrie, II, Leipzig 1907. TH. VAHLEN, Konstruktionen und Approximationen, Leipzig und Berlin 1911. A. ADLER, Theorie der geometrischen Konstruktionen, Leipzig 1906. ENZYKLOPÄDIE der Mathematischen Wissenschaften III: 1, flera artiklar.

namnet »den jämnbreda linjalen» som språkligt enkelt och dock korrekt.

I.

Innan jag övergår till den systematiska framställningen, vill jag visa, hur man enbart med den jämnbreda linjalens hjälp utför några av de viktigare elementära konstruktionerna, huvudsakligen dem, som finnas i Euklides' 1:a bok. De behövas alla, utom de i fig. 3 och 8, för bevisföringen längre fram, och dessutom vill jag redan från början visa läsaren, att konstruktionerna inte äro invecklade eller mödosamma utan kunna tävla med de euklidiska, t. o. m. överträffa dem, i enkelhet.

Vi börja med satserna 9 och 10 i 1:a boken, problemen att *halvera en vinkel och en sträcka* (dra en sträckas *mittpunktsnormal*).

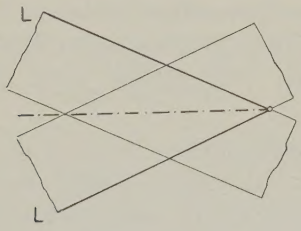


Fig. 1.

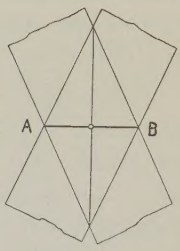


Fig. 2.

Det är av vikt att lägga märke till den karaktäristiska olikheten mellan de båda konstruktionerna. I fig. 1 lägger man linjalens ena kant utefter en given linje L och ritar utefter den andra kanten, i fig. 2 lägger man linjalens ena kant genom en given punkt A och andra kant genom en annan given punkt B. Vi säga i det följande, att vi använda linjalen på 1:a, resp. 2:a sättet. Det är en djupgående skillnad mellan de båda sätten. De äro båda konstruktionsuppgifter av andra graden, ty man kan ju i 1:a fallet lägga linjalen på båda sidor om L och i 2:a fallet på två sätt genom A och B (se fig. 2). Men den 1:a visar den för

en andragradsuppgift ovanliga egenskapen att den alltid har reella lösningar, under det den 2:a har två skilda, två sammanfallande eller ingen lösning, allteftersom sträckan AB är större än, lika med eller mindre än linjalens bredd. Vi visa i II., att denna skillnad mellan de båda sätten att använda linjalen är fundamental. Använder man linjalen förutom som enkel linjal enbart på 2:a sättet, kan man lösa alla konstruktionsproblem av andra graden, under det att linjalen, använd enbart på 1:a sättet, endast når en speciell (och mycket viktig) grupp av andragradsuppgifter, nämligen sådana som, hur än givna data varieras, alltid ha reella

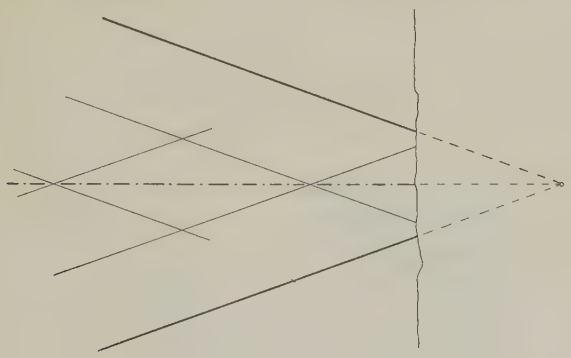


Fig. 3.

lösningar. Vi återkomma till det 2:a sättet särskilt i samband med fig. 11 och till det 1:a i den algebraiska delen av uppsatsen. Låt oss emellertid nu bortse från dessa distinktioner, vara goda opportunister och använda linjalen än på det 1:a, än på det 2:a sättet, allteftersom det snabbast för oss till målet.

Såsom en tillämpning av de två nu utförda konstruktionerna erbjuda sig osökt problemen: sök medelpunkterna till de en given triangel in- och omskrivna cirklarna enbart med hjälp av den jämnbreda linjalen. En variant av konstruktionen i fig. 1 visas i fig 3. Problemet är att söka bissektrisen till en vinkel, vars spets ligger utanför papperet.

Detta problem, som torde vara välkänt för geometrilärarna, tycks mig vara en idealisk övningsuppgift på bissektrisen såsom geometrisk ort. Det intresserar synbart eleverna, och särskilt stimulerar det deras fantasi, att man så kan rita en linje genom en punkt, som inte finns på papperet.

Om vi gå ett steg vidare i 1:a boken, komma vi till sats 11: att i en punkt på en rät linje resa en normal till densamma, som vi här behandla samtidigt med sats 31: att genom en given punkt dra en rät linje, som är parallell med en given. Dessa båda konstruktioner, att *draga parallella linjer och normaler,* äro ju de fundamentala i Euklides' 1:a bok. Den första visas i fig. 4 och den andra i fig. 5. För att slippa beskriva förfaringssättet numrerar jag linjerna och punkterna i den ordning man ritar dem. Jag hoppas, att detta är lika tydligt som de vanliga ordbeskrivningarna.

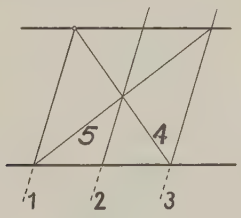


Fig. 4.

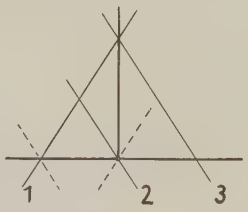


Fig. 5.

Nästa problem (sats 12), att genom en given punkt utanför en rät linje dra en normal till densamma, kan givetvis lösas genom att kombinera de båda föregående konstruktionerna. Denna kombination bör ju ske så ekonomiskt som möjligt, förslagsvis som i fig. 6. Konstruktionen är avgjort underlägsen den med passaren. Kanske någon av tidskriftens läsare finner en enklare?

En konstruktion, som i den algebraiska behandlingen längre fram spelar en viktig roll, är den att *dela en sträcka i ett visst antal lika delar.* Detta problem uppskjuter Euklides ända till 6:e boken, sats 9, och grundar väl då sin be-

kanta lösning på transversalsatsen (VI: 2), ehuru den nuförtiden framställes så, att den direkt ansluter sig till I: 34 och därigenom blir elementärare och, framför allt, oberoende av 5:e bokens teori för irrationaltal. Konstr. i fig. 7 hör liksom Euklides' till 6:e bokens problemkrets och är enklare än

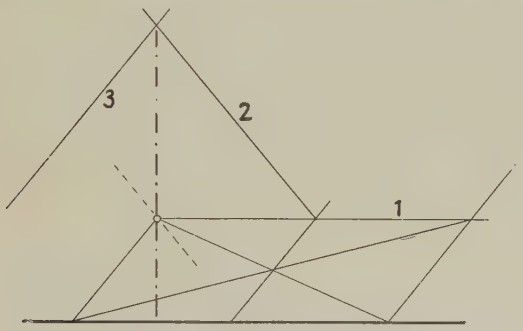


Fig. 6.

den gängse konstr. med passaren, där man drar lika många paralleller som sträckan får delningspunkter. Det förefaller dock troligt, att Euklides tänker sig endast den första delningspunkten konstruerad enl. transversalsatsen och de återstående genom direkt avsättning.

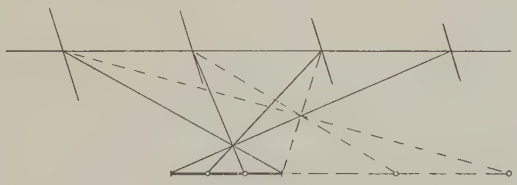


Fig. 7.

Ovanstående konstr. i förening med fig. 5 ger oss en möjlighet att draga mittpunktsnormalen till en sträcka, som är kortare än linjalens bredd (jfr fig. 2).

I fig. 7 är också (de streckade linjerna!) problemet att *mångfaldiga en sträcka* löst. Härvid tänkes denna vara kortare än linjalens bredd. Är den icke det, har man en omedelbarare lösning, som även den kommer till synes i fig. 7.

Det återstår en sista konstruktion att behandla, den viktigaste av dem alla, *sträckförflyttningen*. För varje geometri, som likt den euklidiska lägger *kongruensbegreppet* till grund, är denna konstruktion fundamental. Vi ha fått den vanan att betrakta *problemet* »förflytta en sträcka» som ett postulat, i det vi antaga förflyttningen utan vidare möjlig att utföra med passarens hjälp. När vi granska andra konstruktionshjälpmedel, nödgas vi emellertid betrakta sträckförflyttningen som ett konstruktionsproblem. Det underliga är att EUKLIDES gör detsamma. Hans 3:e postulat lyder: det är alltid möjligt att med given medelpunkt upprita en cirkel,

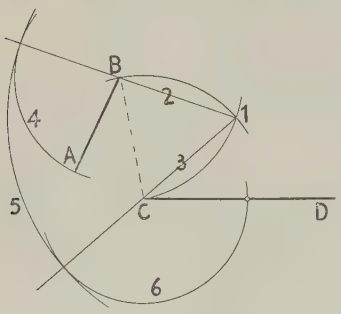


Fig. 8.

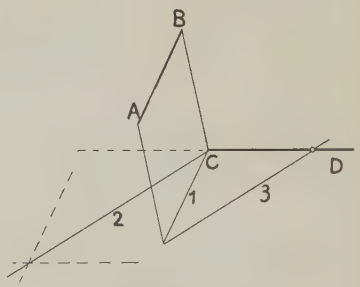


Fig. 9.

som går genom en given punkt. Detta är uppenbarligen ej alls liktydigt med det ovannämnda postulatet, utan Euklides måste visa hur man, byggande på hans 3:e postulat, utför konstruktionen ifråga. Han löser problemet i I: 1—3 på ett sinnrikt sätt, som jag inte vill underlåta att här visa (fig. 8), då denna högst intressanta — och inkonsekventa [1] — detalj hos Euklides är i fara att bli bortglömd.

I fig. 8 är alltså sträckförflyttningen utförd med en passare, som tänkes smälla ihop, så fort vi lyfta den från papperet, och i fig. 9 med den jämnbreda linjalen. AB är

[1] Euklides utgår överallt — redan i sats 4 — från att man utan vidare kan förflytta trianglar och andra figurer och varför då inte sträckor?

den givna sträckan, CD en given rät linje. Konstruktionerna äro, som synes, mödosamma, särskilt den i fig. 9, som kräver inte mindre än 19 linjer. Vid *parallellförflyttningen* av AB är då konstr. i fig. 4 använd två gånger (11 linjer). Enklare (9 linjer) är dock att härvid använda denna endast en gång (konstruera en jämnbred remsa ovanför och två nedanför AC, etc.!).

Jag vill inte lämna denna avdelning av uppsatsen utan att uppräkna de av STEINER (se not sid. 13) uppställda 6 »elementarproblemen», av vilka de flesta blivit lösta i det föregående. De äro:

1. att draga parallella linjer,
2. att mångfaldiga en sträcka eller dela den i ett godtyckligt antal lika delar,
3. att draga mot varandra vinkelräta linjer,
4. att halvera en vinkel eller mångfaldiga den,
5. att förflytta en vinkel,
6. att förflytta en sträcka.

Denna förteckning är ett nästan nödvändigt komplement till Euklides' 1:a bok, där det är synnerligen svårt att få en överblick över konstruktionerna, deras betydelse och sammanhang.

Till sist: *kan man i skolan ha någon glädje av dessa konstruktioner?* Det kan givetvis inte bli fråga om annat än att använda dem som övningsexempel, framför allt i realskolan, men som sådana anser jag dem också mycket lämpliga. De kräva inga kunskaper utöver realskolans, och de äro goda objekt för elevernas uppfinnarglädje. Få ting tjusa en så som överraskningen att se något nytt hos det gamla och vanda, och den gamla vanliga linjalens förmåga att klara av geometriska konstruktioner bör verka uppfriskande på elevernas fantasi. Dessutom tycks det, som om de duktiga räknemästarna inte alltid bäst lyckas lista ut lösningarna. Deras mindre räkneskickliga men kanske mera fantasirika

kamrater kunna så genom lyckliga infall få ett stöd för sitt vacklande självförtroende.

II.

När man undersöker *hjälpmedlen vid de geometriska konstruktionerna,* kan man gå två väsentligt skilda vägar: man kan *utgå från en abstrakt geometri* och fråga sig, vilka redskap man behöver för att materiellt förverkliga den, d. v. s. utföra de konstruktioner, som enligt dess axiom äro möjliga att utföra, *eller från redskapet* eller en grupp av redskap och fråga efter omfattningen av den geometri, de representera. I det senare fallet har man det viktiga specialproblemet: i vad mån täcka dessa geometrier varandra, m. a. o. *i vad mån äro redskapen eller redskapsgrupperna likvärdiga?* Detta speciella problem är lättillgängligare än de två nämnda allmänna och har sitt stora intresse för den elementära geometrien. Euklides utgår ju från att linjal och passare äro de enda tillåtna hjälpmedlen, och man kan då fråga sig, vilka redskap som kan ersätta dem.

Jag skall tillåta mig att nämna några ord om de allmänna problemen, innan jag övergår till det egentliga ämnet för denna uppsats. Den förstnämnda vägen — från abstrakt geometri till konstruktioner — är föga beträdd, hur lockande den än synes vara. Man bör inte glömma att den strängt axiomatiska geometrien är mycket ung. Summariskt uttryckt, skapades den under 1800-talets sista decennier av Cayley, Klein, Pasch och Hilbert och fick sin klassiska utformning i Hilberts Grundlagen der Geometrie. Det är också i 2:a upplagan av detta verk (1903) som, såvitt jag vet, för första gången den nu nämnda vägen beträdes. Hilbert frågar sig, vilka redskap man behöver för att utföra de konstruktioner, som äro möjliga i den geometri, som bygger på hans fyra första axiomgrupper, Axiome der Verknüpfung, Anordnung, Kongruenz und Parallelen. Han visar, att man förutom linjalen endast behöver använda en

s. k. Einheitsüberträger, d. v. s. ett hjälpmedel, med vilket man kan avsätta en fixerad, f. ö. godtycklig sträcka (t. ex. en pappersremsa av bestämd längd). Bevisen äro rent elementära, men det är inte lämpligt att här ta upp utrymme med dem.

Hur vacker denna väg från ett abstrakt axiomsystem till de redskap, som förverkliga dess konstruktioner, än är, inser man snart, att den inte leder så långt. Låt oss blott till Hilberts 4 nämnda axiomgrupper foga den 5:e, och vi se svårigheterna. Tillfogandet av de båda kontinuitetsaxiomen innebär, kort uttryckt, att till de rationella talen läggas de irrationella. Men det är klart, att varje redskap ger blott den grupp av irrationella tal, som svarar mot de kurvor det beskriver (passaren t. ex. endast kvadratrötter). Vi tvingas således att gå den andra vägen, att utgå från redskapet och söka omfattningen av dess konstruktionsmöjligheter.

Vi äro då inne på en väg, vars svårigheter först 1800-talets djupa forskningar i projektiv geometri och i algebra kunde bemästra. Det viktigaste greppet på dessa problem är att man översätter de geometriska egenskaperna till analytiska. Man konstruerar ett koordinatsystem — vilka hjälpmedel, denna konstruktion kräver, är en fundamental fråga — och får så analytiska uttryck för operationerna med ett visst instrument. Ha vi nu ett givet konstruktionsproblem, översätta vi det till ett analytiskt problem i de givna punkternas koordinater. Är nu detta sista problem lösbart med den analytiska operation, som svarar mot instrumentet, är också den geometriska konstruktionen möjlig att utföra med detta — och tvärtom.

Om vi vända oss till den elementära geometrien och alltså till instrumenten *linjal och passare,* innebär detta grepp på problemet, att vi först konstruera ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem, vilket vi ju alltid kunna. Dessutom kan man konstruera *alla rationella tal* (vi ha fixerat en sträcka som enheten) och alltså alla punkter i planet, vilkas koordi-

nater äro rationella tal. Allt detta enligt välkända konstruktionsproblem i Euklides' 1:a bok. Dessutom kan man ju med passarens hjälp konstruera *en godtycklig kvadratrot men heller inga andra irrationaliteter.* Detta är ju välbekant, men särskilt den senare egenskapen bör man inte betrakta som alltför självklar, då ju skärningspunkterna mellan två cirklar bestämmas av två andragradsekvationer i x och y. Alltså: med linjal och passare kan man konstruera alla de och endast de punkter, vilkas koordinater tillhöra den talkropp, som bildas av de givna punkternas koordinater genom användning av de fyra räknesätten jämte kvadratrotsutdragning. Det årtusenden gamla problemet, vilka geometriska konstruktioner som kunna utföras med linjal och passare, transformeras nu till problemet: *vilka ekvationer äro lösbara enbart med operationen kvadratrotsutdragning?* Det är välbekant, vilka viktiga undersökningar rörande regelbundna månghörningar, vinkelns tredelning, cirkelns kvadratur etc. som tagit denna fråga till utgångspunkt. Jag vill endast tillägga att *problemet i viss mån blivit slutgiltigt löst.* Julius Petersen visar i sin Theorie der algebraischen Gleichungen, Köpenhamn 1878, vilka de nödvändiga och tillräckliga villkoren äro för att en algebraisk ekvation skall vara lösbar med upprepade kvadratrotsutdragningar. Leder ett konstruktionsproblem till en algebraisk ekvation, kan man alltså alltid *med full säkerhet avgöra, huruvida det är lösbart eller icke med linjal och passare.*

Men låt oss lämna dessa allmänna och knapphändigt skisserade ting och övergå till det speciella problem, som nämnts i inledningens första stycke. *Vilket eller vilka redskap kan ersätta linjal och passare?*

Jag skall här endast syssla med den jämnbreda linjalen och visa att den, som förut nämnts, förmår att ersätta passaren vid konstruktioner med linjal och passare.

En anmärkning: jag har i det föregående endast talat om *punkter,* givna eller sökta. Man kan ju ha annat givet eller sökt, räta linjer, trianglar, cirklar. Men det är ju alltid möjligt ersätta dessa med ett antal punkter, som entydigt bestämmer dem.

I det följande tages linjalens bredd som längdenhet.

Rent geometrisk undersökning.

Man kan, som förut nämnts, använda den jämnbreda linjalen på två väsentligt skilda sätt. Om vi utgå från två givna punkter A och B, kan man 1:o lägga linjalens ena kant genom A och B eller 2:o lägga den ena kanten genom A och den andra genom B. Man kan också uttrycka denna skillnad så: givet en rät linje, kan man enligt 1:o konstruera alla punkter på avståndet 1 från den givna linjen; givet en punkt, kan man enligt 2:o konstruera alla räta linjer på avståndet 1 från den givna punkten. Det sistnämnda får sitt viktigaste uttryck så: *givet en punkt O, kan man upprita hur många tangenter som helst till cirkeln med medelpunkten O och radien 1.*

Denna cirkel är alltså given, icke som punktort, utan som tangentort. Om man nu observerar, att tangenterna från en punkt till en cirkel, given som punktort, kunna dragas enbart med (den enkantade) linjalens hjälp (se läran om poler och polarer till ett kägelsnitt samt den fullständiga fyrhörningen), bö-

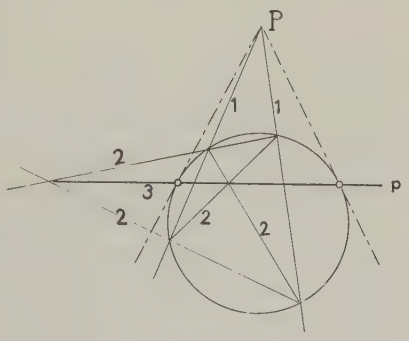


Fig. 10.

ra omvänt skärningspunkterna mellan en cirkel, given som tangentort, och en rät linje kunna fås med samma hjälpmedel. Den första uppgiften är löst på sedvanligt sätt i fig. 10; P är den givna punkten och p dess sökta polar med avseende på cirkeln. I fig. 11 är så den polära motsvarigheten till fig. 10 ritad. Där är linjen p′ given och polen P′ sökt. En linje genom P motsvarar en punkt på p′, en punkt på cirkeln i fig. 10 en tangent till den i fig. 11 etc. Man bör observera, att linjalen såsom jämnbred inte användes för

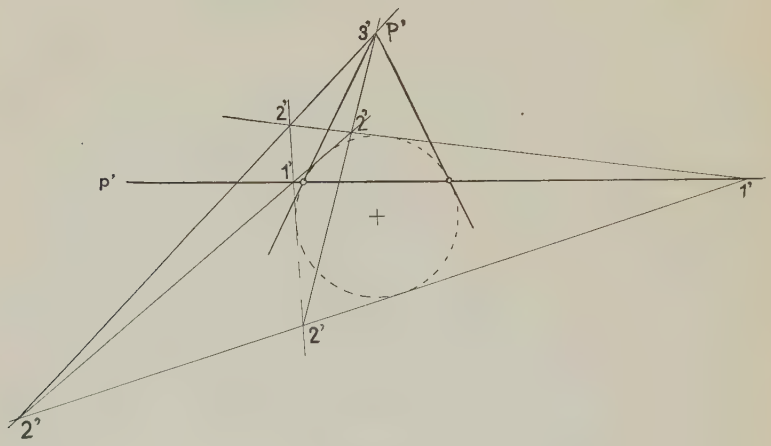


Fig. 11.

själva konstruktionen utan endast för att realisera cirkeln som tangentort. (Att linjer i figurerna få samma nummer betyder naturligtvis, att det är likgiltigt, i vilken inbördes följd man ritar dem.)

Fig. 11 visar oss, att det *enbart med den jämnbreda linjalens hjälp är möjligt att konstruera skärningspunkterna mellan en cirkel med given medelpunkt och radien 1 och en godtycklig rät linje.* (Om denna går genom medelpunkten, måste man välja en annan konstruktion, vilken man lätt finner, sedan man dragit en diameter vinkelrätt mot linjen.)

Detta är den *ena huvudsatsen.* Vi fullborda beviset för

att den jämnbreda linjalen kan ersätta passaren med att visa den *andra huvudsatsen,* den berömda

PONCELET-STEINER'S sats: *Om man har en enda cirkel med medelpunkt uppritad, kan man enbart med linjalens hjälp utföra alla de konstruktioner, som äro möjliga med linjal och passare.*[1] Eller kort uttryckt: en enda, godtycklig cirkel med medelpunkt kan vid de elementära konstruktionerna ersätta passaren.

Som man av det följande skall finna, är det inte väsentligt att den fixa cirkeln skall vara uppritad utan endast att man kan finna dess skärningspunkter med en godtycklig rät linje. Fixera vi nu en punkt O, så kunna vi som den fixa cirkeln välja den med medelpunkten O och radien 1, som med den jämnbreda linjalens hjälp är bestämd genom sina tangenter, och det nyssnämnda beviset för denna linjals användbarhet är fullständigt.

Beviset för Poncelet-Steiner's sats måste vi, som av det följande framgår, bygga på utförbarheten av de konstruktioner, som finnas i I. Dessa borde ju göras enbart med den fixa cirkeln och räta linjer till hjälp, för att beviset skulle bli korrekt. Detta går emellertid utom ramen för denna uppsats. Det följande är således endast de yttre konturerna av ett bevis för satsen, men väl ett strängt bevis för huvudpåståendet i denna uppsats.

I de vanliga Euklideskonstruktionerna får man punkterna på tre olika sätt: såsom *skärningspunkter mellan 1) två räta linjer, 2) en rät linje och en cirkel och 3) två cirklar.* Beträffande 1) är ju intet att säga, men konstruktionerna 2) och 3) måste vi visa vara obegränsat utförbara, även om vi i stället för passaren endast ha en uppritad cirkel C och dess medelpunkt O. Av utrymmesskäl skall jag här endast skissera bevisen för att de verkligen äro det.

[1] J. V. PONCELET, Traité des propriétés projectives, Paris 1822. JAKOB STEINER, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833 (Ostwalds Klassiker, Nr. 60).

Vi börja med 2). Vi ha en cirkel C′ och en rät linje L′ givna, C′ genom medelpunkten O′ och en punkt på periferien P′, vilket ju alltid är möjligt.[1] Vi transformera nu medelst *perspektiv likformighet* C′ till C — likställighetscentrum får man genom att dra OP//O′P′ och söka skärningspunkten mellan OO′ och PP′ — och därmed också L′ till en linje L, vars skärningspunkter P_1 och P_2 med C vi kunna konstruera (fig. 11). P_1 och P_2 transformeras tillbaka till P'_1 och P'_2, de sökta skärningspunkterna mellan L′ och C′. Likställighetstransformationerna kräva ingen annan konstruktion än den i fig. 4.

Om vi nu söka skärningspunkterna mellan två cirklar, är det möjligt återföra detta till 2). De ligga som bekant på cirklarnas potenslinje (radikalaxel) och äro alltså skärningspunkterna mellan denna räta linje och en av cirklarna. Det återstår alltså endast att visa, att *det är möjligt konstruera två cirklars potenslinje.*

Låt oss ha två cirklar C′ och C″ med medelpunkterna O′ och O″ och radierna r′ och r″. En vanlig konstruktion är då följande. Drag $O'A' = r''$ och $O''A'' = r'$ vinkelräta mot O′O″ och därefter A′A″:s mittpunktsnormal, som skär O′O″ i en punkt B. Normalen i B mot O′O″ är potenslinjen.

Konstruktionen av potenslinjen är alltså möjlig enbart med den jämnbreda linjalens hjälp. Jag föredrar dock, med tanke på just detta hjälpmedel, en annan konstruktion, som, särskilt när den ena cirkeln är C, har en viss charm. Vi utgå alltså från C och en annan cirkel C′ och tänka oss ett av deras likställighetscentra uppritat. Att från detta dra de båda tangenterna till C, som också äro tangenter till C′, är särskilt enkelt. Låt tangeringspunkterna vara P och Q, resp. P′ och Q′, så går potenslinjen genom PP′:s och QQ′:s mittpunkter. P och Q konstrueras enl. en förenklad fig. 6, P′

[1] Om radien är given som en uppritad sträcka, kan den ju parallellförflyttas till O′, och om cirkeln är given genom 3 av periferiens punkter, konstrueras O′.

och Q′ enl. den perspektiva likformigheten.[1] Konstruktionen är mycket överskådlig men icke fri från möda.

Har man nu två cirklar C′ och C″ givna, kan man konstruera potenslinjerna $\{C, C'\}$ och $\{C, C''\}$. Deras skärningspunkt är potenspunkten $\{C, C', C''\}$, och normalen från denna mot O′O″ är den sökta potenslinjen $\{C', C''\}$.

Algebraisk undersökning.

Låt oss först konstruera ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem. Vi börja med att draga två parallella linjer på avståndet 1, skära dem med ett annat sådant par och upprita diagonalerna i den romb, vi fått. Dessa bli axlarna i koordinatsystemet. Det är sedan lätt att få nätet av heltalskoordinater uppritat. Längden $\frac{m}{n}$ får man naturligtvis genom att dela längden m med n (fig. 7).

Vid alla dessa konstruktioner ha vi använt linjalen på 1:a sättet. Vi kunna alltså konstruera ett rätvinkligt koordinatsystem, omfattande alla rationella koordinater, genom att använda linjalen enbart på 1:a sättet. Överhuvudtaget kan man därigenom lösa *alla rationella konstruktionsuppgifter* (konstruktioner motsvarande de fyra enkla räknesätten), ty addition och subtraktion kräva endast sträckförflyttning (fig. 9) och multiplikation och division, d. v. s. konstruktion av 4:e proportionalen, kräva förutom sträckförflyttningen endast dragande av parallella linjer (fig. 4),

[1] Konstruktionen av P och Q är en lösning till problemet: givet en cirkel (ett kägelsnitt) som tangentort, sök resp. tangeringspunkter. Den allmänna metoden att lösa detta problem är att tillämpa Brianchon's sats för en kring ett kägelsnitt omskriven sexsiding, nämligen i dess för en 5-, 4- eller 3-siding specialiserade form, allteftersom 0, 1 eller 2 tangeringspunkter redan äro funna. Den som gör konstruktionerna skall finna, att den ogästvänliga Brianchon's sats ger oss en elegant metod att finna *punkter* på den givna cirkeln med radien 1.

vilka båda konstruktioner vi utfört genom att använda linjalen enbart på 1:a sättet.

Vi söka sedan bevisa att $\sqrt{k}$, där k är ett givet tal, också kan konstrueras. Använda vi linjalen enbart på 1:a sättet, lyckas detta ej. Eftersom vi ha en rät vinkel uppritad och kunna förflytta sträckor, kunna vi givetvis konstruera uttryck av typen $\sqrt{a^2 + b^2}$ eller, om vi dividera med a eller b (se föreg. stycke), av typen $\sqrt{1 + m^2}$, där m är ett givet tal. Längre kommer man ej. Låt oss ha en rät linje $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Om vi dra en därmed parallell linje på avståndet 1, avskär den jämnbreda remsan stycken av koordinataxlarna, som just äro lika med nyssnämnda $\sqrt{1 + m^2}$ $\left(m = \frac{a}{b}, \text{ resp. } \frac{b}{a}\right)$. *Man kan alltså med den jämnbreda linjalen, använd enbart på 1:a sättet, konstruera alla de och endast de punkter, vilkas koordinater tillhöra den talkropp, som bildas av de givna punkternas koordinater genom användning av de fyra räknesätten jämte operationen* $\sqrt{1 + m^2}$, *där m är ett givet tal.* Men denna talkropp omfattar icke alla kvadratrötter ur uttryck, bildade av de givna koordinaterna. Vi betrakta $\sqrt{1 - n^2}$. Om nu denna rot för varje värde på n mellan -1 och $+1$ vore konstruerbar på nyssnämnt sätt, måste den vara lika med ett uttryck, bildat av 1 och n med hjälp av de fyra räknesätten och operationen $\sqrt{1 + m^2}$. Men denna likhet, som måste vara en identitet, är orimlig, ty första ledet blir imaginärt för t. ex. $n > 1$, under det att det andra ledet icke för några värden på n kan anta annat än reella värden. $\sqrt{1 - n^2}$ kan alltså icke vara konstruerbar för varje n mellan -1 och $+1$, och då den ju är det med passarens hjälp, ha vi alltså bevisat: *den jämnbreda linjalen, använd enbart på 1:a sättet, kan icke ersätta passaren.* Den tillhör i själva verket en intressant grupp av konstruktionshjälpmedel, som alla äro ekvivalenta med den i inledningen nämnda Hilbertska redskapsgruppen, linjal jämte »Einheitsüberträger».

Om vi nu övergå till att använda linjalen även på 2:a sättet, låt oss lägga den ena kanten genom origo och den andra genom en punkt $(a, 0)$, $a > 1$. Utefter den senare kanten dra vi en linje, i vars ekvation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ vi söka b. Då avståndet från origo till linjen är 1, få vi

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = 1, \quad \frac{1}{b} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}.$$

Sätta vi $\frac{1}{a} = \frac{1-k}{1+k}$, få vi $\frac{1}{b} = \frac{2}{1+k}\sqrt{k}$.

Alltså, *givet ett godtyckligt tal* k, *får man* $\sqrt{k}$ *på följande sätt:*

1. konstruera $a = \frac{1+k}{1-k}$ eller $\frac{k+1}{k-1}$,
2. sök b på ovan angivet sätt,
3. konstruera $\frac{1+k}{2b}$.

Eftersom a alltid blir > 1, är konstruktionen av b alltid möjlig.

Man kan således enbart med den jämnbreda linjalens hjälp utföra konstruktioner, som äro ekvivalenta med de fyra räknesätten och kvadratrotsutdragning.

Men är det kanske möjligt att den jämnbreda linjalen inte endast kan ersätta linjal och passare utan rentav gå utöver dessa hjälpmedel? Frågan är lätt besvarad. Med de sistnämnda kan man ju utföra de båda elementaroperationerna med nämnda linjal, dra parallella linjer på ett visst avstånd från varandra och tangenterna till en cirkel med samma avstånd till radie. Den jämnbreda linjalen kan alltså icke nå längre än de vanliga euklidiska hjälpmedlen.

Sammanfattning:

Den jämnbreda linjalen är som konstruktionshjälpmedel fullständigt ekvivalent med gruppen linjal och passare.

Denna sammanfattning skulle t. o. m. kunna lyda: »Den jämnbreda linjalen är, *även om den* förutom som enkel linjal *användes enbart på 2:a sättet,* som konstruktionshjälpmedel etc.». Ty i fig. 11 användes ej linjalen på 1:a sättet, och denna fig. i förening med Poncelet-Steiner's sats bevisar, att den jämnbreda linjalen kan ersätta passaren. Då vi ju *här* bevisat Poncelet-Steiner's sats bl. a. genom att använda linjalen på 1:a sättet, ha vi visserligen inte visat rättmätigheten av tillägget ifråga, men jag ville dock inte förbigå denna intressanta detalj, som också kan uttryckas så:

Den jämnbreda linjalen, använd enbart på 2:a sättet, förmår lika mycket som densamma, använd på både 1:a och 2:a sättet.

Man kan alltså genom att använda linjalen på 2:a sättet utföra elementaroperationen 1., att dra en linje parallell med en given L på avståndet 1 från denna, vilket kanske inte är så förvånansvärt, då den kan betraktas som ett specialfall av elementaroperationen 2., nämligen det att från oändlighetspunkten på L draga en tangent till en cirkel med radien 1 och medelpunkten på L.

III.

Linjalens dimensioner.

En fråga, som mycket sällan ställes om konstruktionshjälpmedlen, är den, om deras dimensioner verkligen tillåta de konstruktioner, som med deras hjälp principiellt äro utförbara. Vi vilja här besvara frågan för den jämnbreda linjalens del. För denna ha vi förutsatt följande postulat: det är alltid möjligt att draga ett par parallella linjer på avståndet 1 så att, om A och B äro givna punkter, 1. den ena linjen går genom AB, 2. den ena linjen går genom A och den andra genom B (villkor för 2. : $AB \geqq 1$) samt 3.

att godtyckligt förlänga en rät linje. I postulaten 1. och 2. utgår man då stillatigande från att linjalen är *obegränsat lång*. Men om linjalen är kort?

Man måste då i dessa inrycka (f. ö. lätt fixerade) bestämmelser om hur lång sträckan AB på sin höjd får vara, och därefter har man att lösa följande *konstruktionsuppgifter:* 1. att sammanbinda två punkter A och B med varandra, om sträckan AB är längre än linjalen och 2. att från en punkt B draga tangenterna till en cirkel med medelpunkten A och radien 1, om B ligger för långt från A för att en omedelbar konstruktion enl. postulat 2. skall vara möjlig. (Med linjalens längd mena vi längden av den längsta av de båda parallella kanterna.)

Uppgiften 1. hör snarare till den enkla än till den jämnbreda linjalen, och den kan också lösas med hjälp av en sådan. I den projektiva geometrien känner man i DESARGUES' sats sedan länge en dylik lösning.[1]

Möjligheten att lösa uppgift 2. även med en godtyckligt kort linjal är visad av F. SEVERI i »Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso», Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XVIII (1904), sid. 256—259. Han visar först, att cirkeln i Poncelet-Steiner's sats kan ersättas med en godtyckligt liten cirkelbåge, och drar därav slutsatsen att den jämnbreda linjalen, som han f. ö. använder enbart på 2:a sättet, kan vara av »begränsad längd». Beviset föres helt med den projektiva geometriens metoder. Något elementärt bevis har jag icke sett publicerat.

Konstruktionsuppgift 1. Om sträckan AB är längre än linjalen, måste vi söka finna en punkt C på den, tillräckligt nära, låt oss säga, A. Vi tillgripa då för andra gången i denna uppsats *transformationen medelst perspektiv likfor-*

[1] Av detta för linjalens del och av Poncelet-Steiner's sats för passarens följer det märkliga faktum, att konstruktionerna med linjal och passare äro obegränsat utförbara även med en hur kort linjal och en hur liten passare som helst.

mighet.[1] Låt B vara centrum i en sådan och C den transformerade punkten till A, så måste C ligga på linjen AB. Konstruktionen visas i fig. 12, där vi för att förenkla den ha dragit såväl linjeparet 2 som 3 genom omedelbar användning av linjalens båda kanter. Linjen 5 drages parallellt med 4 enl. konstr. i fig. 4, vilken kräver att linjalens längd är > 2. Om vi nu ta hänsyn till att den givna punkten P i fig. 4 aldrig behöver tänkas ligga på ett avstånd $> {}^1/_2$ från den givna linjen L, se vi att A och C, alltså även A och B, kunna sammanbindas, om linjalens längd är större än, låt oss säga, $2\,{}^1/_2$, alltså om linjalen är av i handeln gängse sort.

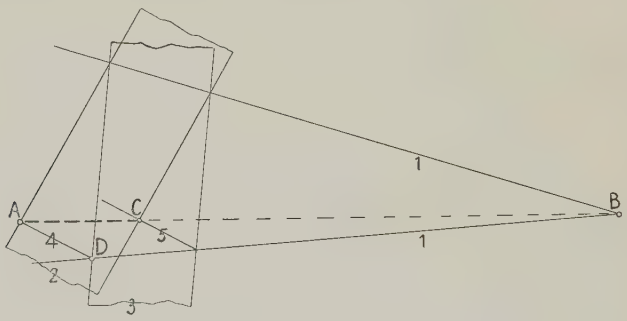


Fig. 12.

Men vi ge oss inte till tåls med detta resultat utan resonera vidare. Vi konstatera först, att linjeparet 2 likaväl kan vara ett par parallella linjer godtyckligt nära varandra. Detsamma gäller paret 3, och även de båda linjerna 1 kan man, ev. efter några försök, draga godtyckligt nära A. Av detta följer att sträckorna AD och AC kunna göras hur små som helst och alltså dragas med en *godtyckligt kort* linjal. Men kan man med en sådan också konstruera parallella linjer?

Det är av det nyss sagda klart, att vid denna konstruktion

[1] Som en kuriositet kan nämnas, att läran om likställigheten, som i dessa undersökningar visat sig så oumbärlig, f. n. varken ingår i skol- eller universitetskursen.

P kan tänkas ligga godtyckligt nära L. Men vi möta ändå svårigheter. Vi måste söka en mindre elementär konstruktion än den i fig. 4. Adler använder i sin lärobok konstruktionen i fig. 13, som bara är en perspektivbild av fig. 4, så att de parallella linjerna 1, 2 och 3 på teckningen löpa samman i en punkt. Men enl. denna konstruktion måste linjalens längd vara > 1. Vi fortsätta därför i den högre geometrien och finna där i DESARGUES' sats en konstruktion, som visar, att de punkter, vi måste sammanbinda med räta linjer, kunna bringas hur nära varandra som helst; jag kan inte gå närmare in på denna konstruktion, endast hänvisa till att fig. 14 kan betraktas som perspektivbild av ett tresidigt prisma, som skäres av tvenne plan, vilkas skärningslinje är linjen 6. De punkter, vi måste sammanbinda, äro betecknade med små cirklar.[1]

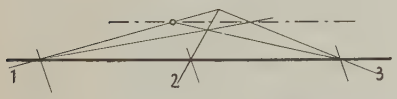


Fig. 13.

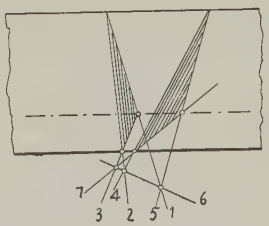


Fig. 14.

(Om man endast har en enkel linjal till sitt förfogande, visar fig. 13 en metod att draga en linje parallell med en given, L, om man blott på L kan lägga två lika sträckor intill varandra, och fig. 14 en dylik, om man blott har en enda med L parallell linje given.)

Man kan alltså förena två punkter vilka som helst med en rät linje, hur kort linjalen än är. Ett exempel, som vi

[1] Läsaren tycker kanske att jag gör en meningslös kringgående rörelse, då jag inte direkt löser uppgift 1. med Desargues' sats, som jag ändå, tyvärr, inte kan undgå. Skälet är naturligtvis att jag så långt det går vill använda elementära konstruktioner, och den först beskrivna är ju en sådan, som är utförbar med varje i praktiken använd linjal.

strax dra nytta av: man kan mångfaldiga eller dela en godtycklig sträcka även med en mycket kort linjal (fig. 7).

Konstruktionsuppgift 2. Lösa vi med hjälp av den algebraiska behandlingen i II. genom att visa, att en kvadratrot vilken som helst kan konstrueras även med en kort linjal, ty att draga tangenterna till en cirkel innebär ju intet annat än att konstruera en viss kvadratrot. Om vid denna konstruktion a blir obetydligt större än 1, lyckas konstr. av b även med en mycket kort linjal. Vi få visserligen blott en bit av linjen $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ uppritad, men vi kunna enl. postulat 3 godtyckligt förlänga denna bit. Nu se vi genast, att ju större k är, ju mera närmar sig a värdet 1. Roten ur ett tillräckligt stort tal är alltså alltid konstruerbar med en aldrig så kort linjal, ty vid alla de övriga konstruktionerna i den algebraiska behandlingen användes linjalen på 1:a sättet. Men nu kan man ju mångfaldiga den givna sträckan k och sedan dela roten, t. ex. multiplicera k med 9 och dela roten med 3. Härav följer, att en kvadratrot vilken som helst kan konstrueras med en godtyckligt kort linjal och att alltså uppgiften 2. alltid är lösbar med en dylik.

Vi ha hittills endast talat om längden av linjalen. Det torde väl vara klart, att linjalens absoluta bredd icke kan ha någon som helst betydelse för konstruktionernas utförbarhet (men väl för deras *utförande*, se särskilt anm. efter fig. 7).

Sammanfattning:

Konstruktionerna med den jämnbreda linjalen äro obegränsat utförbara, vilka dimensioner linjalen än har.

Den jämnbreda linjalen som hjälpmedel jämte andra.

Vi ha hittills begränsat oss till det fall, att vi använda linjalen ifråga som enda hjälpmedel vid konstruktionerna.

Detta är ju ur teoretisk synpunkt det mest intressanta fallet. Ur praktisk synpunkt är det nog snarare så, att först när man nyttjar andra instrument samtidigt, den jämnbreda linjalen blir en värdefull hjälp. Visserligen säger ADLER i sin förut omnämnda Theorie der geometrischen Konstruktionen (sid. 130): Diese Konstruktionen haben praktischen Wert namentlich für die Feldmesskunde. (»Diese» syftar här på de enbart med linjalen utförda konstruktionerna.) Adler ger inga närmare upplysningar, men jag ställer mig, ehuru osakkunnig, frågande till hans yttrande. Möjligen kan Adlers ovana att benämna den jämnbreda linjalen »Parallellineal» ha spelat honom ett spratt. Ty en parallellinjal, i den mening man bör fatta ordet, har man god nytta av vid fältmätningar, det vet jag av egen erfarenhet.

Det är inte här av nöden att närmare ingå på den hjälp, man vid konstruktionerna med passare, vinkelhake etc. har av den jämnbreda linjalen. Detta får man i varje konkret fall undersöka. Betydelsefullt är det härvidlag att som ledstjärna ha den »konstruerandets ekonomi», som *geometrografien,* grundad av fransmannen LEMOINE,[1] satt som sitt ideal.

Endast några exempel. Konstruktionen av 4:e proportionalen (enl. transversalsatsen för trianglar) kan förenklas, om vi som bas i triangeln välja ena kanten av linjalen och till transversal den andra. Om vi använda linjalen på 2:a sättet, kunna vi förenkla lösningen till sådana problem som att dela en sträcka innantill och utantill i ett givet förhållande eller att söka likställighetspunkterna till två uppritade cirklar.

Jag har här tagit mig friheten framlägga resultat, som ingalunda äro nya. Men då jag funnit, att även mycket kunniga matematiker inte känt till dem, och då litteraturen om dem är ganska tungläst, tycktes det mig gagneligt att

[1] E. LEMOINE, Géométrographie ou art des constructions géométriques, Paris 1902, serien Scientia N:r 18.

här vidarebefordra dem, och detta inte minst därför att de härröra från den elementära geometrien, handla om det vanligaste av alla tecknarhjälpmedel och ändå äro blott en mansålder gamla. Det är välbehövligt, att man då och då påminner sig, att den elementära geometrien även i våra dagar utvecklas och att den inte ens i väsentliga delar avslutades av Euklides. Särskilt välbehövligt är det därför, att de gängse läroböckerna vid universiteten (Lindelöfs och Briot-Bouquet's) inte innehålla något därom och man alltså kan lämna universitetet efter att visserligen ha klättrat ett stycke uppåt i geometriens byggnad men knappast blivit mera hemmastadd i bottenvåningen.

En generalisering av den Euler'ska pentagonaltalsatsen.

Ett tillägg till uppsatsen i årg. *18*, 1935, sid. 221.

Jag har sedan funnit, att den i ovannämnda uppsats härledda formeln (16)

$$\prod_{\sigma=1}^{\infty}(1-y^{\sigma})\prod_{\sigma=0}^{\infty}(1-y^{\sigma}z_1)\prod_{\sigma=0}^{\infty}(1-y^{\sigma}z_2)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}(z_1^{\nu}+z_2^{\nu})\,y^{\binom{\nu}{2}},$$

$$z_1\cdot z_2=y$$

är identisk, på beteckningarna när, med en av formlerna från teorin för de Jacobiska ϑ-funktionerna:

$$\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)\prod_{1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}q^{n^2}x^n.$$

Hugo Tegnér.

Ett bevis för satsen $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$.

För ovanstående välbekanta sats finns ett stort antal bevis, vilka dock i allmänhet äro mera komplicerade än som behöves, eller t. ex. arbeta med transcendenta hjälpmedel, som äro främmande för denna rent algebraiska sats. Ett av H. Bohr nyligen givet bevis, som jag refererade vid ett sammanträde av Matematiska sällskapet i Stockholm, gav upphov åt en diskussion, varvid framkom, att flera av sällskapets medlemmar också sysslat med denna fråga. Jag fick därigenom anledning att leta fram ur mina gömmor ett bevis av induktiv art, vilket väl torde vara så enkelt, som man rimligtvis kan begära. Det blev sedan publicerat på franska i K. V. A:s Arkiv d. 8 januari i år, men genom red:s vänliga tillmötesgående införes här också en svensk version.

Vi sätta $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$ och $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = g$ samt

antaga $a \geqq g$ för ett visst n och godtyckliga positiva tal $a_1 \ldots a_n$ Man har då

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} = \frac{na + a_{n+1}}{n+1} = a\left\{1 + \frac{a_{n+1} - a}{a(n+1)}\right\},$$

och för $x \geqq 0$ gäller

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = (1+x)^n + \ldots + 1 + x + 1 \geqq n + 1,$$

d. v. s. $(1+x)^{n+1} \geqq 1 + (n+1)x$. Likaså är för $0 \leqq y < 1$:

$$\frac{1 - (1-y)^{n+1}}{y} = 1 + 1 - y + \ldots + (1-y)^n \leqq n + 1,$$

d. v. s. $(1-y)^{n+1} \geqq 1 - (n+1)y > 0$, så snart $y < \frac{1}{n+1}$.

Härav följer

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geqq a^n a_{n+1} \geqq g^n a_{n+1} = a_1 \ldots a_{n+1}.$$

Doktor N. Juringius har för mig påpekat, att man blott behöver åberopa sig på olikheten $(1+x)^{n+1} \geqq 1 + (n+1)x$, om man låter a_{n+1} beteckna det största värdet av $a_1 \ldots a_{n+1}$. Man ser *f.* ö. lätt av beviset, att likheten $a = g$ endast kan äga rum, då $a_1 = \ldots = a_n$.

S. Wigert.

Vändutrymmet för ett åkdon.

Framhjulen på ett åkdon vridas en konstant vinkel v ur sitt normala läge. Avståndet mellan fram- och bakhjulens axlar är l, avståndet mellan framhjulen är 2f, mellan bakhjulen 2b. Vilka kurvor utgöra hjulspåren vid vändningen? Vilket vändutrymme behöver åkdonet?

Detta problem är säkerligen löst både praktiskt och teoretiskt. Undertecknad har av en tillfällighet kommit att reflektera över problemet och därvid funnit följande enkla lösningsmetod, som måhända kan förtjäna omnämnas, även om den skulle vara framställd förut.

Först behandlas problemet för en cykel. F och B må vara fram- och bakhjulets beröringspunkter med den plana marken. Vi bortse från framgaffelns lutning och böjning. Vid vändningen beskriver F en kurva (C) och B en kurva (c). FB är alltid tangent till (c) i B. Tangenten till (C) i F bildar vinkeln v med BF:s förlängning. I ett rätvinkligt koordinatsystem må koordinaterna för F och B vara $(X; Y)$ och $(x; y)$. Linjen FB bildar vinkeln φ med x-axeln.

Om O $(\xi; \eta)$ är krökningscentrum för kurvan (c) i B, så kan visas, att OF är normal till kurvan (C). Detta inses lätt medelst satser ur den kinematiska geometrien men skall här bevisas direkt. Vi ha nämligen:

$$\begin{cases} X = x + l\cos\varphi \\ Y = y + l\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = x - \dfrac{dy}{d\varphi} \\ \eta = y + \dfrac{dx}{d\varphi} \end{cases}.$$

Härav erhålles $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{dy + l\cos\varphi\, d\varphi}{dx - l\sin\varphi\, d\varphi}$, varav vinkelkoefficienten för normalen till (C) i F: $\dfrac{l\sin\varphi - \dfrac{dx}{d\varphi}}{l\cos\varphi + \dfrac{dy}{d\varphi}}$, som är densamma som vinkelkoefficienten för OF: $\dfrac{Y - \eta}{X - \xi}$.

I triangeln OBF är $BF = l$ = konstant och $\angle BOF = v$ = konstant. Alltså är krökningsradien OB till (c) konstant, varav följer, att (c) är en cirkel. Normalen till (C) går alltid genom den fixa punkten O, alltså är även (C) en cirkel med O till medelpunkt. Hjulspåren

äro alltså koncentriska cirklar med radierna $\frac{l}{\sin v}$ och $l \cot v$.

Vändytan för en cykel är alltså en cirkel med radien $\frac{l}{\sin v}$.

Vi behandla därefter problemet för ett fyrhjuligt åkdon, där framhjulens axel vid vändning vrides kring mittpunkten.

Alla punkterna på framhjulens axel röra sig i varje ögonblick i parallella riktningar, likaså alla punkter på bakhjulens axel. Betraktar man mittpunkterna på dessa axlar, så kan föregående resonemang tillämpas på dessa. Hjulspåren bli cirklar med radierna $\left(\frac{l}{\sin v} \pm f\right)$ resp. $(l \cot v \pm b)$. Vändytans radie är lika med det största av dessa tal.

Slutligen behandla vi problemet för ett fyrhjuligt åkdon, där framhjulen vridas kring sammanbindningslinjens ändpunkter men denna linje själv icke deltar i vridningen (såsom förhållandet är vid bilarna). Framhjulens rörelseriktningar kunna då icke vara parallella. Enligt en bekant sats ur den kinematiska geometrien gå nämligen i varje ögonblick av rörelsen normalerna till alla punkternas rörelsebanor genom samma punkt, det s. k. momentancentrum. Om vi liksom i föregående fall betrakta mittpunkterna på fram- resp. bakhjulens sammanbindningslinjer och anta, att den förra punktens rörelseriktning bildar den konstanta vinkeln v med de båda punkternas sammanbindningslinje, så röra sig dessa punkter i koncentriska cirklar med radierna $\frac{l}{\sin v}$ resp. $l \cot v$.

Hjulspåren bli då cirklar med radierna $\left(\frac{l}{\sin v} \pm f \cos v\right)$ resp. $(l \cot v \pm b)$. Vändytans radie är lika med det största av dessa tal.

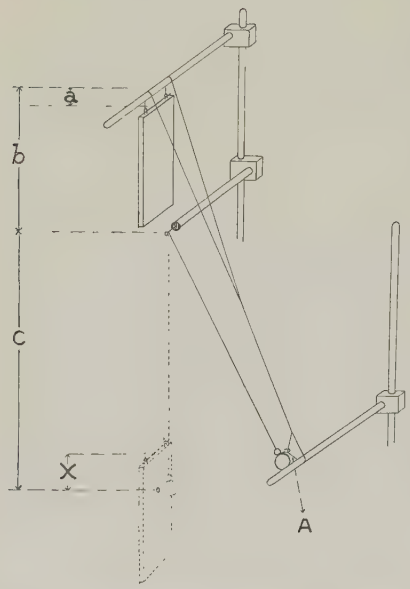
Om framhjulen äro inställda så, att de bilda lika stora vinklar med sammanbindningslinjen mellan axlarnas mittpunkter, komma de att slira något. De vinklar α resp. β, som det inre resp. det yttre framhjulets rörelseriktning bildar, bli bestämda genom ekvationerna

$$\cot \alpha = \cot v - \frac{f}{l}, \qquad \cot \beta = \cot v + \frac{f}{l}.$$

C. E. Sjöstedt.

En enkel fallmaskin.

Försöksanordningen framgår av figuren. »Lodet» utgöres av en plywoodskiva, upphängd i två krampor med sytråd över en rund stång, som fig. visar. Sytråden slutar vid en annan rund stång i en ögla, i vilken pendelkulan upphakas med en krok (gjord av tunn koppartråd). När nu sytråden vid *A brännes* av med en tändsticka, slår pendelkulan efter en kvarts svängning mot plattan och sätter märke i denna. (Förf. har försökt dels med bläckbestruken kula och dels med paraffinöverdragen platta och i bägge fallen erhållit tydliga märken). Det är givetvis av vikt, att apparatens inbördes längder avpassas. Lämpliga ungef. dimensioner äro: plywoodplattan 7 × 16 cm, a = 2 cm, b = 20 cm och c = 40 cm.



Förf. har med tillfredsställande resultat använt apparaten dels vid demonstration i klass och dels vid lab. i klass 5[5] vid h. a. läroverk i Haparanda. Här nedan exempel på en mätserie:

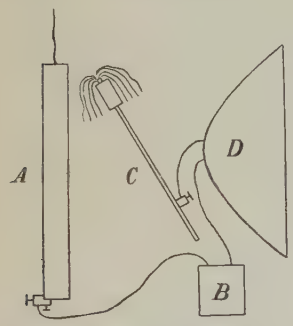
$a =$ 1,3 cm, alltså den väg plattan fallit $s = b + c - a - x = 53{,}7$ cm.
$b = 18{,}3$ cm, » på 1 min gjorde pendeln 46 helsvängn.
$c = 40{,}0$ cm, » $t = \frac{60}{46{,}4} = 0{,}33$ sek.
$x =$ 3,3 cm, varur fås $g = 986$ cm/sek^2.

Till sin princip — tidmätning med pendel — är anordningen ej ny. Så har t. ex. B. Pettersson i P. A. Norstedts & Söners »Meddelande om ny materiell», häfte 10, beskrivit en liknande apparat av pendeltyp. Förf. har med dessa rader velat visa, att man med mycket enkla medel och praktiskt taget utan kostnader, själv kan göra sig en apparat, som fungerar tillfredsställande.

Hilding Nilsson.

En enkel anordning för mätning av ljudets hastighet i luft.

Ljudkällan är en mindre gonggong *A* eller en tom plåtdunk, som anslås med en metallstav *C*. Staven är i ena änden försedd med en metallklump vid vilken en stålkrats (för jaktgevär) är fastsatt. Kratsens trådar äro böjda över metallklumpen.



Vid anslaget slutes en strömkrets, i vilken, förutom strömkällan *B*, en glödlampa med reflektor *D* (cykellykta), ingår. Trådarna i stålkratsen förlänga kontakttiden, så att lampan lyser med full styrka under en kort stund. Reflektorn kan eventuellt förses med diopter av enklaste slag.

Mätningen utföres lämpligen på en rak väg och reflektorn, som uppställes mot mörk bakgrund, inriktas så att ljuset kastas framåt vägen. På gonggongen slås ett slag i sekunden, varvid en sekundpendel är användbar som tidmätare. Anslaget göres bäst tangentialt uppifrån och nedifrån. Observatörerna avlägsna sig utefter vägen och kunna då iakttaga, att ljudet framkommer försenat i förhållande till ljusglimten. På något över 300 meters avstånd — vilken sträcka bör på förhand vara uppmätt och utmärkt — inträder koincidens. Observatörernas avstånd till 300-meterstrecket, lufttemperaturen och luftfuktigheten antecknas.

Med ett tiotal observatörer erhålles mycket goda medelvärden.

Erik Nilsson.

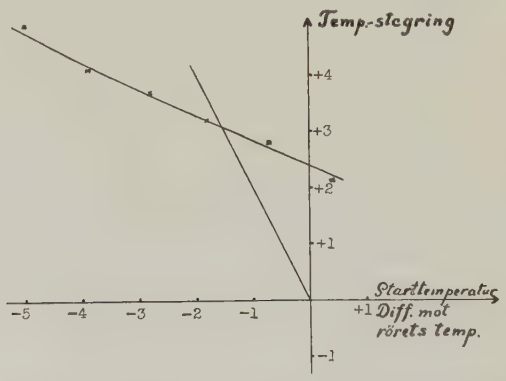
Notis angående Whitings rör.

Whitings metod att bestämma värmeekvivalenten medelst fallande blyhagel finnes beskriven i de flesta laborationshandledningar; det brukar framhållas, att haglen i förväg skola avkylas. Vändes röret 50 gånger, bör haglens starttemperatur ligga 1,5° under »rummets temperatur» för den mest använda rörlängden.

Avläses rummets temperatur på en väggtermometer, kan man ena gången få värden omkring 330 kgm/kcal, andra gången t. ex. 500. Vill man ha goda värden, måste rören framtagas någon timme i förväg och placeras på de bord, där de skola användas, skyddade

för direkt solsken; och framför allt måste »rummets temperatur» avläsas på en noggrann termometer, vars kula befinner sig *inne i* röret. Till röret hör som bekant en kork med hål för termometern; denna kork förses med en tiondedelsgraderad termometer och sättes i, redan när rören framtagas. Iakttagas dessa försiktighetsmått, differera de flesta värdena mindre än 5 % från det riktiga.

Talet 1,5° förutsätter emellertid, att man redan känner försökets resultat. Ju noggrannare alla försiktighetsmått iakttagas, för att man verkligen skall få just denna temperaturdifferens, desto mer förstärkes känslan att hela försöket är en cirkel. Försöket bör därför helst ordnas så, att de 1,5 graderna inte behöva uppgivas i förväg. Varje grupp får ha sin starttemperatur, som noggrant avläses, resultaten sammanarbetas vid laborationens slut.



Figuren visar, huru bearbetningen utföres. Temperaturstegringen avsättes som ordinata mot starttemperaturen som abskissa. På så sätt erhålles den svagt krökta kurvan. Man söker temperaturstegringen för det fall, då starttemperaturen ligger lika mycket under rörets temperatur som sluttemperaturen ligger över densamma. Då är temperaturstegringen under försöket dubbelt så stor som temperaturdifferensen vid starten. I diagrammet drar man alltså en rät linje med vinkelkoefficienten — 2. Vid dess skärningspunkt med kurvan avläses det bästa värdet på temperaturstegringen. Figuren ger en uppfattning om vad man i bästa fall uppnår med denna metod. Slutresultatet i det fall figuren avser blev 429 kgm/kcal.

Resultaten försämras, om man ökar antalet vridningar över 50 eller minskar hagelmängden under 1 kg.

R. Lundblad.

Två stökiometriska försök.

1. *Hydroxylgruppens kvantitativa sammansättning.*

Vid den första genomgången i realskolan av natrium och dess reaktion med vatten brukar det framhållas, att vid denna reaktion endast en del av vattnets väte bortgår i fri form, medan en annan del ingår förening med natrium och syre i natriumhydroxid. Det i natriumhydroxiden ingående vätet påvisas genom upphettning med järn, då även det bortgår i fri form. Utan att anföra bevis brukar man måhända framhålla, att vid reaktionen vattnets väte fördelar sig i lika delar, varför förhållandet syre : väte i natriumhydroxid (och andra baser) är 16:1 i stället för som i vatten 16:2. I fråga om natrium-(och ännu mer kalium)hydroxid torde det vara svårt att enkelt visa, att så är fallet; däremot är uppgiften lätt i fråga om kalciumhydroxid, vars bildning av metall och vatten är mycket mindre häftig. I det följande skall en anordning beskrivas, med vars hjälp man snabbt och utan stor svårighet kan visa, att vid reaktionen mellan en viss mängd vatten och kalcium i överskott det utvecklade vätet endast utgör hälften av vattnets vätehalt. Apparaten var redan preliminärt prövad, då jag fann, att problemet redan blivit behandlat och löst av W. Bargheer i en uppsats i Ztschr. physik. u. chem. Unterricht *54*, 160; 1932. Emellertid erbjuda de båda förfaringssätten trots principiell överensstämmelse så pass stora skiljaktigheter i utförandet, att en beskrivning även av den senare tillkomna anordningen kan anses motiverad.

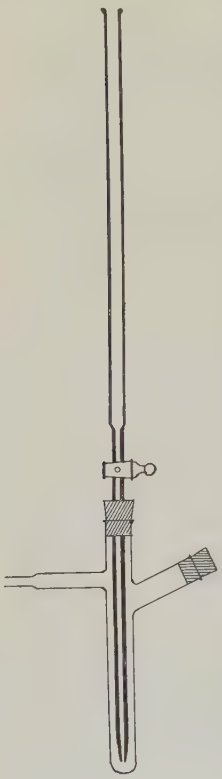
Apparaten (fig. 1) utgöres av ett provrör (vidd 18 mm, längd över allt cirka 150 mm) med något tjockare väggar än vanligt. Det är försett med ett vitt sidorör för kalciummetallens införande och ett avledningsrör för vätgasen. Vattnet uppmätes och tillföres medelst en i röret insatt pipett, som rymmer 1 cm^3 och är indelad i 1/100 cm^3, så att den tillåter uppskattning av 1/1000 cm^3. Den har försetts med kran nedtill och förlängts med ett kapillärrör, utdraget till en fin spets, som når ned ungefär 1 cm över provrörets botten. Till apparaturen hör ett vanligt mätrör eller bättre en gasbyrett för vätegasens tillvaratagande och uppmätning, volym 100 cm^3.

Försöket utföres på följande sätt:

1. Pipetten fylles med vatten genom sugning, varvid noga tillses, att den ej innehåller några luftblåsor. Spetsen avtorkas, och pipetten insättes i provröret.

2. Raspat kalcium ihälles genom sidoröret till en höjd av c:a 5 cm (= 4 g).

3. Sedan apparaturen hopsatts, uttappas ur pipetten *långsamt* en noggrant uppmätt vattenmängd, bäst ungefär 0.1 cm³. Härvid blir den nedre delen av beskickningen starkt uppvärmd och en del vatten förgasas, som man kan finna därav, att kalciumhydroxid tydligt bildas upp till kalciumlagrets halva höjd. Endast vid mycket oförsiktig vattentillsats behöver man riskera att vattenånga bortgår och kondenseras högre upp i röret.



4. Vätgasens volym, temperatur och tryck uppmätas. Vad beträffar volymen av det tillsatta vattnet, måste denna, om pipettens spets ej är mycket fint utdragen, korrigeras för den vattenmängd, som tillkommer genom att vattnet i den starkt upphettade spetsen kokar bort. För detta ändamål uttages pipetten, och om en granskning visar, att spetsen är tom, fylles den genom kranens försiktiga öppnande nätt och jämnt. Först härefter gör man den slutgiltiga avläsningen av vattennivån. Korrektionen kan uppgå till 0.02 cm³, men bortfaller, om spetsen göres mycket fin.

5. Den kvarvarande kalciummängden, åtminstone dess övre skikt är fullt användbar för vanliga ändamål och behöver ej bortkastas.

6. Vid diskussionen av försöket torde det vara enklast att beräkna *vikten* av det utvecklade vätet, varvid man begagnar sig av ett av läraren på förhand beräknat värde på litervikten av fuktig vätgas vid de rådande betingelserna, och jämföra den med vätemängden i det använda vattnet.

Vid ett försök var sålunda vattenmängden 0.118 cm³, innehållande 0.0131 g väte; den utvecklade vätemängden beräknades väga 0.00630 g, förhållande således — 0.48 i stället för 0.5. Som medeltal av 14 försök erhölls kvoten frigjort väte/väte i vattnet = 0.46; lägsta värde 0.42, högsta värde 0.49. Bäst lyckas försöket med små vattenmängder (0.1 g) och mycket långsam tillsats.

2. *Ekvivalentvikterna av järn, koppar och silver,* ett laborationsförsök för realskolan.

Bestämningar av metallers ekvivalentvikter, grundade på relationen mellan metallens vikt och vikten av den vätgas, som den

frigör ur en syra, kunna endast utföras med magnesium, aluminium och zink. I fråga om metaller som alltför långsamt eller alls ej frigöra väte ur syror, kan ekvivalentvikten bestämmas genom metallens utfällning ur en saltlösning med någon av ovanstående metaller. Emellertid är valet av metaller, lämpliga för dylika bestämningar, ganska strängt begränsat, särskilt därigenom att många metaller ha en växlande valens och lösningar av deras salter innehålla okontrollerbara blandningar av olika ekvivalentvikter. Av denna anledning elimineras exempelvis kvicksilver och tenn, som eljest lätt utfällas av oädlare metaller. Bly utfälles lätt på zink, men inhöljer metallen, så att omsättningen blir ofullständig, o. s. v. Kvar stå egentligen blott fyra metaller, nämligen zink, järn, koppar och silver, av vilka zink och järn utfälla koppar (och silver), koppar utfäller silver. Bekant för eleverna är ekvivalentvikten för zink, om nämligen denna bestämts genom upplösning av zink i saltsyra, vidare kopparns ekvivalentvikt, som kan beräknas ur kopparoxidens redan tidigare bestämda viktsammansättning. Här finnes således ett utmärkt tillfälle att sammanknyta ett trängre och ett vidare ekvivalensbegrepp och att visa, att de viktsmängder av två metaller, som båda ersätta 1 g väte också ersätta varandra i kemiska föreningar.

Principen för dessa försök är sålunda den att omsätta en avvägd mängd av den oädlare metallen med överskott av en lösning, innehållande joner av den ädlare metallen, och att filtrera, tvätta, torka och väga den utfällda metallen. För att omsättningen skall bli snabb och fullständig, måste den förstnämnda metallen föreligga i pulverform; för att undvika den för nybörjare i kemi svåra och tidsödande överföringen av den utfällda metallen från reaktionskärlet till ett filtrum, ha dessa båda sammanslagits till ett genom att hela förloppet äger rum i en glasfilterdegel, som utan sug tjänstgör som en nästan vattentät bägare, med sug som ett filtrum.

De använda glasfilterdeglarna, betecknade 10 G 4, rymma 15 cm^3 och ha en ganska tät filterskiva av sintrat glas. Degeln 10 G 3 av samma typ och storlek har vidare porer och filtrerar snabbare, men kan möjligen erbjuda någon risk för förlust. Ett enkelt sätt att anbringa degeln på sugkolven är att i denna med en genomborrad gummipropp eller paraffinerad korkpropp fastsätta en vanlig liten tratt och att i denna tratt ställa degeln, sedan dess nedre, hopsnörda del försetts med en kort gummiring, klippt av en tjockväggig slang och slutande kant i kant med degelns underkant. Skulle tätningen vara bristfällig, kan man hälla litet vatten i den yttre tratten.

Varje grupp erhåller en degel och en helt kort (5 cm) glasstav, i den ena änden utplattad till en spade. Denna stav skall stå i degeln under hela försöket och sålunda också ingå i degelns vikt. Sedan degeln vägts tom, beskickas den av läraren med en lämplig metallkvantitet och väges ånyo. Därpå sättes den i sugkolvens tratt; ungefär 10 cm^3 lösning (2-normal kopparsulfat, resp. 1-normal silvernitrat) ihälles. Härvid är det av stor vikt, att man omedelbart börjar röra om med glasstaven och oavbrutet fortsätter därmed under cirka 10 min. Nu avsuges lösningen, och en ny portion ihälles. Efter ytterligare några minuters omröring avsuges, tvättas med vatten, till sist en gång med alkohol. Degeln torkas i torkskåp eller på torkplåt och väges.

För nästa försök förberedes degeln genom rengöring med konc. salpetersyra, vatten och alkohol. I nedan refererade försök gjordes denna rengöring för tids vinnande mera summariskt, nämligen genom att större delen av den utfällda metallen (koppar) bortskrapades och uthälldes, emedan det troddes, att den kvarvarande kopparen även den skulle omsätta sig med den nya lösningen (silvernitrat). Det gör den också otvivelaktigt, men resultaten blevo vid detta sätt att arbeta sämre (lägre) än då ren degel och ny substans kommo till användning. Eljest vore det givetvis idealiskt att kunna använda varje utfälld metall till utfällning av nästa och på så sätt få en serie av ekvivalenta metallmängder, utgående från zink, men erfarenheten från våra försök är, att goda resultat uppnås endast om man vid varje försök har ren degel och ny metall.

De använda metallerna voro: Zinkpulver pro analysi och Ferrum red. pro analysi från Schering-Kahlbaum samt kopparpulver, erhållet genom vätgasreduktion av analysren kopparoxid. Det är viktigt att icke använda för mycket metall, 0.35—0.50 g har visat sig ge de bästa resultaten.

De flesta av de här nedan anförda resultaten äro erhållna vid en prövning av metoden, utförd av fil. mag. G. Stoltz, som också lett den laborationsövning, då eleverna i klass 4^5 vid Norra reallärоverket i Stockholm utförde försöken med zink-koppar, resp. koppar-silver. Vid de av herr Stoltz utförda bestämningarna erhöllos i 9 försök värden på kopparns ekvivalentvikt mellan 30 och 32, i 8 försök silvervärden mellan 109 och 119 (medeltal 31.0, resp. 113). För koppar, utfälld med järn, erhölls värdet 31.0. Vid successiva bestämningar enligt schemat Zn-Cu-Ag erhölls för koppar 31.0, för silver 96! (medeltal av 3 försök). Vid utfällning av koppar med zink erhöllo laboranterna för koppar värdet 30.0 i medeltal av 16 bestämningar, varierande mellan 27 och 31, då

uppenbart orimliga värden (t. ex. 36) utelämnas. Vid utfällning av silver med koppar erhöllos ganska starkt varierande värden (90—125), de flesta dock i närheten av medeltalet 106.

G. Starck.

Svenska kondensatorer.

Det torde ej vara allmänt känt, att vi ha inhemsk tillverkning av förstklassiga kondensatorer, både vanliga »papperslindade» och »halvtorra», elektrolytiska. (Egendomligt nog går en del av tillverkningen utrikes, medan vi samtidigt importera samma slags varor i stor myckenhet och till något högre pris.) Firman Alpha i Sundbyberg tillverkar små, lätta, elektrolytiska kondensatorer, tjänliga till många experiment, där hög kapacitet önskas. För spänningar upp till 450 volt finnas kondensatorer på 8 och 16 μF till c:a 3 à 6 kr. och för lägre spänningar upp till 200 μF i standardutförande (8 kr.), men även 5 000 och 10 000 μF kunna levereras. En elektrolytisk kondensator består av två hoplindade aluminiumfolier, som skiljas åt av en pappers- el. gasremsa, indränkt med lämpliga elektrolyter. Det ena foliet, som ständigt bör vara positivt, är belagt med ett ytterst tunt skikt aluminiumoxid, vilket tjänar som dielektrikum. Skulle man skada skiktet på något sätt, läkes skadan strax genom att ny oxid bildas vid kondensatorns uppladdning. Dylika kondensatorer äro små, lätta och billiga men kräva bestämd polaritet. De papperslindade kondensatorerna äro i jämförelse med dessa större och tyngre men tåla växelström. En mycket användbar dylik kondensator, som kostar c:a 10 kr., är gjuten till ett block, men består av tre från varandra isolerade kapaciteter på resp. 1, 2 och 5 μF, försedda med vardera 2 uttag (trådar eller lödöron). Tillverkaren synes knappast själv ha beaktat dess stora användningsområde. Kondensatorn uppgives nämligen endast hålla 1 + 2 + 5 μF, men man kan lätt genom olika kopplingar av uttagen åstadkomma följande kapaciteter: $\frac{1}{17}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, 1, $1\frac{3}{7}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{7}{8}$, 2, $2\frac{3}{7}$, $2\frac{5}{6}$, 3, 5, $5\frac{2}{3}$, 6, 7, 8 μF. Med 4 olika kapaciteter i blocket ernås icke mindre än 100 olika kombinationer.

J. Tandberg.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Från årsmötet i januari 1936.[1]

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning höll årsmöte i Stockholm den 7—8 jan. 1936. Mötet, till vilket ett sjuttiotal medlemmar hade infunnit sig, inleddes med stadgeenliga förhandlingar på Hotell Gillet. Styrelse- och revisionsberättelserna upplästes och godkändes, varefter full och tacksam ansvarsfrihet beviljades styrelse och skattmästare för år 1935. Då rektor B. Söderborg icke längre av hälsoskäl var förhindrad fungera som ordförande, anhöll föreningens ordförande under det gångna året, rektor J. S. Hedström, att till honom få återlämna ordförandeklubban. Sedan rektor S. härefter valts till ordförande, riktade han ett tack till avgående ordf. för det gångna årets arbete.

Av den avgående styrelsen återvaldes alla utom professor C. Heuman och lektor C. Bergholm, vilka undanbett sig återval. Nyvalda blevo rektor P. G. Persson, Malmö, lektor T. Wetterblad, Stockholm, och adjunkt S. Åstrand, Stockholm. Revisorerna, f. d. byråchef E. Göransson, Saltsjöbaden, och överlärare E. Hedfors, Ålsten, samt revisorssuppleanterna, adjunkt V. Carlsson, Stockholm, och rektor E. Öije, Stockholm, omvaldes. Inom styrelsen valdes lektor Wetterblad till vice ordförande, adjunkt Åstrand till sekreterare — sedan lektor C. Lönnqvist, som alltifrån föreningens start fungerat som sekreterare, avsagt sig på grund av bristande tid — och lektor Lönnqvist till skattmästare. Till arbetsutskott utsågos ordf., vice ordf., sekr., lektor G. Starck, Stockholm, adjunkt B. Wahlström, Stockholm, och adjunkt E. Wettervik, Stockholm.

Efter förhandlingarna höll lektor G. Starck, Stockholm, föredrag om »Skolans önskemål beträffande lärarutbildningen i kemi». Lektor Starck redogjorde för frågans utveckling under det senaste året och genomgick och kommenterade det yttrande, som utarbetats av Kemiska sällskapet vid Stockholms Högskola genom en kom-

[1] Tidigare medd. från föreningen: årg. *16*, 1933 sid. 226; årg. *17*, 1934 sid. 46 och 113; årg. *18*, 1935, sid. 42 och 47.

mitté, i vars arbete föredragshållaren själv deltagit. I detta yttrande föreslås, dels vissa ändringar i de kurser för fil. ämbetsexamen, som nu läsas vid Stockholms Högskola, i avsikt att bereda större utrymme för vissa gränsområden mot fysiken och mineralogien och för den organiska reaktionsläran, dels en särskild och verklig lärarkurs, omfattande övningar att inför ett auditorium och på begränsad tid ordna och diskutera demonstrationsförsök, teknisk kemi, något om skolkursens omfattning och fördelning på de olika klasserna m. m. Den föreslagna kursen skulle komma att taga sex veckor i anspråk och skulle göras obligatorisk för fil. ämbetsexamen. Den skulle ledas av en skolman, varigenom man finge en garanti för att de pedagogiska synpunkterna skulle tillmätas avgörande betydelse.

I den följande diskussionen yttrade sig ett tiotal av de närvarande. Det framhölls, att universitetsundervisningen inte bara i kemi utan i alla ämnen förr eller senare måste taga mer hänsyn till vad som behöves i skolan, än vad som nu sker. Å andra sidan varnades för att göra universitetens undervisning för mycket seminariebetonad och för att taga med moment i den speciella lärarkursen, som tämligen hjälpligt voro tillgodosedda i den nuvarande undervisningen. Föreningen beslöt att uppdraga åt styrelsen att på sätt den kunde finna lämpligt ge uttryck åt föreningens instämmande i det syfte, som skrivelsen från Kemiska Sällskapet ville tjäna, samt att dessutom undersöka i vad mån en liknande aktion kunde göras, dels vid de andra universiteten, dels även för fysikens och matematikens del.

Efter lunchpausen höll civilingenjör I. Svedberg föredrag om television. Efter det synnerligen intressanta föredraget fingo åhörarna se och höra en utsändning — ett par S. F:s kortfilmer — från Svenska Radiobolaget på Kungsholmen i Stockholm.

På onsdagsmorgonen avreste deltagarna med tåg till Uppsala. Färden fortsattes omedelbart till Institutet för högspänningsforskning vid Husbyborg, strax utanför Uppsala. Professor H. Norinder visade själv sin institution, beskrev i korta drag dess utrustning samt lämnade en sammanfattande redogörelse för några av Institutets arbetsuppgifter, vilka belystes med instruktiva högspänningsförsök.

Först visades den stora växelströmstransformatorn i funktion. Denna lämnar enfasig 50-periodig växelspänning på max. 500 000 volt och 1 000 kVA. Efter ett inledande försök, där glidgnistor längs en halvledare påvisades, gjordes överslagsprov på stödisolatorer (spänning 400 000 volt) samt demonstrerades en hornåskledares ljusbågssläckande egenskaper. Medelst en elektrostatisk högspän-

ningsmaskin enligt principen med roterande band åstadkommos därefter urladdningar på 800 000 volt, vilka till sin natur nära efterlikna verkliga blixtar.

Så fick den stora impulsgeneratorn träda i funktion. Denna består av 15 kondensatorer, vilka vid uppladdning äro parallellkopplade, men vid urladdning automatiskt seriekopplas. Kondensatorerna laddas med likriktad spänning, som maximalt kan uppgå till 150 000 volt. Vid urladdningen erhåller man därvid en aperiodisk impuls med max. spänning 2 250 000 volt och en varaktighet, som kan regleras inom 10—100 mikrosekunder, d. v. s. efterliknande blixturladdningar. Med impulsgeneratorn gjordes »blixtnedslag» på en modell av ett utomhusställverk för högspänning, samt prövades medelst överslagsförsök isolationsförmågan hos isolatorkedjor och impregnerade träreglar för högspänningskraftlinjer. På en sådan med skifferolja behandlad regel fastgjordes tvenne elektroder på c:a 4 m avstånd, varvid spänningen kunde stegras till det aktningsvärda beloppet av 1 200 000 volt, innan urladdningen med blixt och dunder brakade löst längs regeln.

Till sist fingo deltagarna se prof. Norinders katodstråleoscillografer i arbete vid studiet av atmosfäriska radiostörningar. Tyvärr fanns det ej något åskväder på närmare håll än i tropikerna. Det är emellertid märkligt nog, att man i Uppsala kan registrera blixturladdningar på inemot tusen mils avstånd.

Efter lunch på Gillet besöktes Fysikalisk-kemiska institutionen, där docent Y. Björnståhl redogjorde för byggnadens tillkomst och dess minutiöst planlagda inredning. Deltagarna fingo därefter gruppvis göra en rundvandring genom lokalerna och studera den imponerande apparatuppsättningen. Vad som kanske mest fångade intresset var den stora, inventiöst monterade elektromagneten, som vid demonstrationstillfället matades med 1 500 amp., varvid ett fält på 72 000 gauss erhölls. Sedan fickuren lämnats på behörigt avstånd, fick var och en tillfälle pröva fältets styrka genom att med handen införa och vrida en metallkula i fältet. Virvelströmmarna gjorde sig därvid så kraftigt gällande, att det kändes som om kulan suttit fast i tjära.

Ultracentifugerna för undersökning av proteinämnenas sedimenteringshastigheter i centrifugalfält av utomordentlig styrka — upp till 400 000 gånger tyngdkraftfältet, motsvarande en rotationshastighet av 1 300 varv per sekund — blev likaledes föremål för demonstration. I kalkyleringsrummet kunde man taga del av de ur försöken beräknade molekylvikterna för proteinämnen, vilka befunnits ligga mellan c:a 18 000 och 10 000 000 och märkvärdigt nog synas förhålla sig som talen 2, 4, 8, 12, 24, 48, 96, 192.

Till sist hade deltagarna tillfälle besöka Allmänna läroverkets och Folkskoleseminariets fysiska och kemiska institutioner. På seminariet var anordnad en demonstration av enkla växelströmsförsök.

Sigurd Åstrand.

Styrelseberättelse för 1935.

Den vid årsmötet den 8 januari valda styrelsen konstituerade sig vid sammanträde följande dag.

Styrelsens sammansättning har under året varit följande: rektor J. S. Hedström, Stockholm, ordf.; lektor C. Bergholm, Stockholm, v. ordf.; lektor E. G. Bolinder, Uppsala; lektor K. Dahr, Örebro; professor C. Heuman, Saltsjöbaden; professor B. Holmberg, Stockholm; lektor Axel Larsson, Stockholm; lektor M. Lemoine, Uppsala; lektor C. Lönnqvist, Södertälje, sekreterare och skattmästare; professor J. Malmqvist, Huddinge; lektor G. Mikaelsson, Norrköping; lektor Eva Ramstedt, Stockholm; professor M. Riesz, Lund; överste R. Sjöberg, Stockholm; lektor L. G. Starck, Stockholm; lektor A. Wahlgren, Stockholm; adjunkt B. Wahlström, Stockholm; adjunkt E. Wettervik, Stockholm.

Styrelsen har under året hållit fyra protokollförda sammanträden. Dess arbetsutskott har bestått av ordföranden, vice ordföranden, sekreteraren och adjunkterna B. Wahlström och E. Wettervik.

Vid årsmötet i januari 1935 diskuterade föreningen livligt den då nyss utkomna k. förordningen om en specialkurs i matematik i realgymnasiet med alla de ändringar den skulle nödvändiggöra i anordningen av matematikundervisningen även på andra stadier, särskilt i realskolan. Någon resolution fattades icke, men alla syntes eniga om att frågan om matematikundervisningen i läroverken långt ifrån funnit sin lösning genom den införda specialkursen, vilken i allmänhet icke ens ansågs utgöra ett steg i rätt riktning. Därför anmodade styrelsen arbetsutskottet att snarast möjligt överväga åtgärder till frågans tillrättaläggande.

Arbetsutskottet utarbetade för detta ändamål ett förslag till skrivelse till Konungen. Detta förslag underställdes styrelsen, och efter dess godkännande ingavs skrivelsen till k. ecklesiastikdepartementet i början av mars. Samtidigt skickades den i avskrift till skolöverstyrelsen, till pressen och till representanter för högskolor och läroverk.

Skrivelsen mynnar ut i förslaget, att specialkursen i matematik strykes och ersättes med en grundligare kurs i matematik nedan-

för det differentierade gymnasiet; de realister som icke behöva en högre kurs i matematik avsluta detta ämne vid flyttning till det differentierade gymnasiet och få i dess ställe franska som obligatoriskt ämne. Även andra förbättringar av matematikens ställning påyrkas i skrivelsen.

Om dess öde är för närvarande ingenting bekant.

I maj anordnades genom arbetsutskottet ett föredrag på Planetariatet i Stockholm av Fil. Dr N. V. E. Nordenmark med demonstration av apparaturen.

I december har styrelsen efter förslag av arbetsutskottet fattat ett viktigt beslut. Till stöd för fysik- och kemilärarna vid läroverken har styrelsen valt rådgivare för ämnena fysik och kemi att bilda en rådfrågningsbyrå, till vilken man från läroverk och likställda skolor kan vända sig för att mot ersättning få råd vid inredning av fysiska och kemiska institutioner. De valda rådgivarna äro lektorerna C. Bergholm och Axel Larsson i fysik, lektor L. G. Starck i kemi.

Föreningens medlemsantal har under året stigit till 650.

Stockholm den 7 jan. 1936.

J. S. Hedström,

Conrad Lönnqvist.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Föreningen avhöll sitt höstmöte den 11 nov. 1935 på Fysiska institutionen i närvaro av ett hundratal medlemmar, till största delen aktiva lärare i södra Sverige och studerande i naturvetenskapliga sektionen vid Lunds universitet. Sammanträdet öppnades av lundaföreningens ordförande rektor P. G. Persson, Malmö, varefter avhandlades diverse föreningsangelägenheter. Rektor Persson höll därpå föredrag över »Geometrins grunder». En analys gjordes av geometrins grundläggande begrepp i anslutning till Euklides elementa. Samtidigt som föredragshållaren framlade den klara tankegång, som skenbart framträder i Euklides framställning, påvisades ofullkomligheterna i begreppen och i axiomen. De ansatser, som gjorts för att avhjälpa bristerna, behandlades och till sist diskuterades Hilberts arbeten över den elementära geometrien, vilka arbeten samlats i »Grundlagen der Geometrie» och vars mål var att uppställa ett fullständigt system av axiom för Euklides geometri.

Så vidtog en diskussion över »Laborationer vid fyllnadsprövningar i fysik och kemi i studentexamen». Förste inledaren, lektor

B. Svensson, som representerade ämnet fysik, framlade den praxis han själv tillämpat vid Högre allmänna läroverket i Lund och framställde önskemål om att enhetliga fordringar i fråga om laborationsövningar uppställas gemensamt för alla läroverk. Andre inledaren, läroverksadjunkt R. Nordenstedt, Malmö, vilken representerade ämnet kemi, framställde i stort sett samma önskemål och framlade därjämte en mera preciserad plan för kemilaborationernas omfattning och uppdelning på de olika områdena inom kemien.

Diskussionen, som vidtog omedelbart efter diskussionsinledningen, men som snart avbröts för andra programpunkter och fortsattes vid kaffet efter den gemensamma supén å Akademiska Föreningens restaurang, blev mycket livlig. Bland dem som yttrade sig märktes rektorerna Hernqvist och Montén, professor Koch, lektorerna Lenander och Leide, licentiaterna Kullenberg och Svensson samt inledarna. Bokliga kunskaper och den experimentella färdigheten i ett ämne vägdes mot varandra. Privatisternas och komplettandernas ställning diskuterades. Tanken framkom på elementära provpedevtiska kurser vid universiteten med ungefär sådana kursplaner, som svara mot kursplanerna i de båda sista gymnasieringarna. Kompletteringskurser anordnas varje termin av Lärarаspiranternas Förening i Lund. Arbetsutskottet fick i uppdrag att med sig adjungera ledamöter och närmare utreda frågan och sedan sätta sig i förbindelse med huvudföreningen i Stockholm.

Tredje programpunkten utgjorde demonstration av fysikaliska apparater för undervisningsändamål från A. B. Rudolph Grave, Stockholm. Apparaterna icke blott visades, utan varje apparat fick ses i funktion, vilket givetvis var av stort värde. Speciellt omfattade demonstrationen apparater till elektricitetsläran, och här representerade Grave även den tyska instrumentfirman Phywe. En grupp av apparater för flygfysik väckte stor uppmärksamhet. Även visades en serie av optikförsök med apparater från Spindler Hoyer. Antalet demonstrationer uppgick till 43; dessa voro fördelade på sju personer från institutionen, docenterna, amanuenserna och e. o. amanuenserna, som således var och en demonstrerade 6—7 apparatuppställningar. Intresset för föreningen är stort här i södra Sverige, och under vårterminen planeras ett sammanträde i Malmö den 14 mars, varvid omfattningen av fysikkurserna i realskolan och gymnasiets första ring samt lärarutbildningen i kemi blir föremål för diskussion.

Börje Svensson.

Bokanmälningar.

R. G. Aitken, J. A. Crowther, J. A. Thomson m. fl., *Den stora planen.* Ordning och intelligens i naturen. Med inledning av professor Knut Lundmark. Natur och Kultur, 1935. 237 sid., kr. 6:—, inb. 7:75.

Det föreliggande arbetet — en översättning av en samling uppsatser, författade av en rad framstående naturvetenskapsmän och utgivna av Frances Mason under titeln »The great design» — är ett ganska märkligt dokument. Det vittnar på sitt sätt om en ny orientering inom naturvetenskapen. Professor Lundmark framhåller i sin inledning, att det för femtio år sedan rådde en optimistisk uppfattning om naturvetenskapernas förmåga att lösa världsgåtorna. Det var, skriver han, på djupaste allvar som Svante Arrhenius 1907 i ett av sina arbeten citerade Goethes ironiska verser: »Es ist ein gross Ergötzen .. zu schauen .. wie wir's dann zuletzt so herrlich weitgebracht». Denna optimistiska tro på naturforskningens snart sagt obegränsade förmåga har under de senaste årtiondena lämnat rum för en annan uppfattning. De nyaste landvinningarna ha visserligen varit storartade på alla områden, men samtidigt framstår allt tydligare naturvetenskapens begränsning, dess oförmåga att ge en lösning på de yttersta problemen, eller som Sir Francis Younghusband uttrycker det: »Vetenskapen har lärt oss att ana det vetbaras outtömlighet». För femtio år sedan trodde mången ännu på möjligheten att förklara universum som en stor mekanism. Den tanken är övergiven, och i stället uppdyka åter de två problem, som den mekaniska världsuppfattningen helt skjutit åt sidan, nämligen problemet om den fria viljan och själens odödlighet. Professor Lundmark berättar i sin inledning om den förvåning det väckte, när Bengt Lidforss år 1911 i avslutningen till sitt arbete: »Kristendomen förr och nu» deklarerade sin anslutning till en allmänt religiös livsuppfattning. — Numera händer det allt oftare, att den religiösa känslan lyser fram även hos naturforskare. Sir James Jeans är icke ensam om sin åsikt, när han förklarar: »Världsalltet börjar alltmer likna en jättestor tanke än en jättestor maskin».

»Den stora planen» avser att ur olika vetenskapers synvinklar belysa skapelsens enhetlighet. Fjorton forskare bidraga var och

en med sitt vittnesbörd om den planmässighet, som härskar överallt i naturen och som låter oss ana ett förnuftigt ändamål och en högsta intelligens bakom universum. Det är en mångfald av skiftande åskådningar, som träder oss till mötes; vi få se världen med astronomers, fysikers, kemisters och biologers ögon. Uppsatserna äro utomordentligt intressanta och ge framställningar av nya och viktiga forskningsresultat inom de olika vetenskapsgrenarna. Men om det varit utgivarens avsikt att skänka världen ett teleologiskt bevis för Guds existens, så har syftet icke nåtts. Arbetet ger icke ens en klar bild av en enhetlig världsåskådning; denna samling av uppsatser är alltför heterogen, och totalintrycket blir matt och diffust. Det hindrar dock icke, att boken ger en god behållning. Den lär oss, att religiositet och naturforskning långt ifrån att vara oförenliga tvärtom ofta trivas tillsamman, och framför allt, den visar, huru olika uttryck den religiösa känslan kan taga sig hos olika individer.

Anna Beckman.

A. Moseley, H. J. Barton Chapple och Hugo Larsson, *Televisionen av i dag.* Natur och Kultur, 1935. 171 sid., kr. 3: 90, inb. 5: 50.

Vi ha i vår tid blivit bortskämda genom teknikens oerhörda framsteg. Utvecklingen går med nästan svindlande fart, och knappt har en uppfinning fullkomnats, förrän allmänheten ivrigt frågar efter nästa. Sedan telefonen nått en sådan fulländning, att vi med dess hjälp kunna höra ord, som uttalas på andra sidan jordklotet, väntar mänskligheten med otålighet att på motsvarande sätt med elektricitetens och radiovågornas bistånd kunna se vad som tilldrar sig i långt avlägsna länder. Man frågar: Hur länge skall det dröja, innan varje hem kan förses med en televisionsapparat? Varför finner ingenjörskonsten det vara en svårare uppgift att överföra synintryck än att låta oss höra med elektricitetens hjälp?

Svaret på dessa frågor ges på ett populärt och lättfattligt sätt i föreliggande framställning om televisionen, författad av två engelsmän och bearbetad med särskild hänsyn till svenska förhållanden av ingenjör Hugo Larsson vid Telegrafstyrelsens radiobyrå. Sedan författarna i ett inledande kapitel lämnat en kort historik, övergå de till en redogörelse för televisionens grundprinciper. Läsaren får en klar bild av de oerhörda svårigheter som möta, när det gäller att överföra synintryck medelst radiovågor; författarna förklara också på ett lättfattligt sätt, varför televisionen arbetar bäst med tillhjälp av korta elektriska vågor. De därpå följande sex kapitlen skildra, huru ingenjörskonsten

strävar att övervinna svårigheterna. Även de moderna televisionssystemen med katodstrålrör ha fått sin plats i framställningen, som till och med skildrar Zworykins eleganta förslag till lösning av sändareproblemet genom ikonoskopet.

I det sista kapitlet försöker ingenjör Larsson slutligen besvara frågan: »När få vi svenska televisionssändningar?» Svenska Radioaktiebolaget har som bekant startat med experimentsändningar av television — men svårigheterna äro stora och framför allt, apparaterna äro mycket dyra. Författaren vågar ej heller utlova, att den nystartade televisionssändningen »inom överskådlig framtid» skall få någon större betydelse i stil med rundradion.

Men om även icke vilken amatör som helst kan våga hoppas att bliva ägare av en televisionsapparat, så kan han helt säkert ha nöje av att läsa denna på samma gång klara och lättfattliga framställning, skriven på ett både ledigt och trevligt sätt. Författarna ha lyckats synnerligen väl med sin uppgift att inom en trång ram tillfredsställa vår vetgirighet ifråga om televisionens problem.

Anna Beckman.

F. Kohlrausch, *Praktische Physik*, Siebzehnte vollständig neu bearbeitete Auflage, Herausgegeben von F. Henning, B. G. Teubner 1935, 958 sid., geb., RM 32:—; i utlandet pris RM 24:—.

I den 17:e uppl. framträder Kohlrauschs välkända »Praktische Physik» i helt ny gestalt. En genomgripande omredigering har ägt rum såväl beträffande innehåll som illustrationsmaterial. Ej mindre än ett tjugutal fackmän ha medarbetat under Prof. F. Henning som huvudredaktör, så gott som alla tillhörande Physikalisch-Technische Reichsanstalts vetenskapliga stab. Härigenom har man fått garanti för ett tillförlitligt innehåll. En person mäktar numera ej ensam skriva ett dylikt verk, som spänner över hela fysiken och vill ge den studerande såväl som den vetenskapligt arbetande fysikern och ingenjören allt väsentligt ifråga om säkerställda mätmetoder.

Innehållet är uppdelat i sex huvudkapitel: Allgemeines über Messungen, Mechanik (Akustik), Zustandsgrössen und Wärme, Optik, Elektrizität u. Magn., Korpuskeln und Energiequanten. Åtskilligt gammal material har ersatts med nytt och väsentliga utvidgningar ha gjorts. Mest genomgripande äro förändringarna inom kap. Elektr. o. Magn.; en uppdelning har här skett i låg-, medel- och högfrekvent växelström, och elektronrören och deras användning inom mättekniken behandlas utförligt. Röntgenstrålar

och radioaktivitet äro inrymda i det sista kapitlet om Korpuskeln und Energiquanten, där man även finner en ny avdelning behandlande optiska metoder för bestämning av atom- och molekylkonstanter.

Den nya upplagan överstiger till omfånget den näst föregående (1930) med ett hundratal sidor, vilket är mindre än man skulle vänta med hänsyn till det myckna nya, som tillkommit. Figurerna — alla omritade — ha ökats från 395 till 512 och tabellerna från 54 till 73. De värdefulla litteraturhänvisningarna ha även avsevärt utökats.

Det lönar sig att anskaffa den 17:e uppl., även om man har den 16:e. Priset är mycket moderat.

C. E. Blom.

Anders Ångström, *Meteorologi.* I serien »Flyg och Motor», Albert Bonnier, Stockholm 1935, 203 sid., kr. 6:25.

Genom den fortgående förbättringen av flygmaskiner och navigationsmedel har man visserligen lyckats frigöra sig från en stor del av atmosfärens störande inflytande, men för flygningens säkerhet kräves dock alltjämt en omfattande meteorologisk organisation samt speciella flygmeteorologiska forskningar och kunskaper. Rådplägning angående väderleksläget äger numera alltid rum mellan meteorolog och flygare före varje längre färd och oftast även ifråga om kortare flygningar. Förutom den utomordentliga säkerhetstjänst, som vinnes genom denna personliga kontakt, lära de båda kontrahenterna närmare känna varandras möjligheter och behov. Flygarens praktiska erfarenheter av lufthavets dynamik och vädrets yttringar jämte prognosställarens teoretiska beräkningar äro vidare av stor betydelse för meteorologiens utveckling i stort.

Docenten, förste statsmeteorologen A. Ångström, har genom sin framställning velat giva i första hand den växande kåren av svenska flygare en handledning i flygmeteorologiska problem, men även för andra, som äro intresserade av hithörande ämnen, fyller boken ett stort behov. Först lämnas en redogörelse för atmosfärens sammansättning, dess höjd och skiktning och i samband därmed för luftmassor av olika arter enligt modernare begrepp, definierade med hänsyn till luftens egenskaper och ursprung. Gränsytor mellan varma och kalla massor, s. k. fronter, samt strömnings- och jämviktsförhållanden m. m. vid dessa behandlas i ett särskilt kapitel. Sedan väderleksfenomen, energiomvandlingar och strålningsprocesser diskuterats, ingår förf. på de skilda väderlekselementen. Lufttemperaturen, dess medelvärden och variationer såväl vid jordytan som i höjden, åskådliggöras genom

tabeller och diagram, varpå följer en redogörelse beträffande fuktighet och därmed sammanhängande molnbildning. Den väderleksfaktor, som för närvarande kanske vållar flygningen de största besvärligheterna, trots begynnande användning av blindflygning, är dimman. Författaren har därför ansett det lämpligt att särskilt ingående diskutera detta fenomen, dess olika uppkomst och faser ävensom siktförhållandena i övrigt. Från ett par kapitel om sambandet mellan lufttryck och vind, friktionens och jordrotationens inverkan härpå vid marken och i högre luftlager samt om vindens struktur, övergår framställningen i cyklonernas och anticyklonernas — eller med nyare uttryck: lågtryckens och högtryckens — konstruktion samt atmosfärens allmänna cirkulation omkring jorden. Läsaren är därefter lämpligt preparerad för att närmare fatta innebörden av väderleksförutsägelsernas organisation och metodik samt behovet och användningen av de olika meteorologiska instrumenten. Bland de instrument som beskrivas må nämnas Assmanns aspirationspsykrometer, flygplansmeteorografen, skålkorsanemometern och ballongteodoliten. Hur flygmeteorologien arbetar, hur luftfarten betjänas och även i sin tur kan lämna gentjänster, utgör en avdelning om den praktiska sidan av saken. En ny forskningsgren, som börjat alltmer utvecklas, är flygklimatologien. I arbetet ges därför också en kort framställning av Sveriges klimat, huvudsakligen ur luftfartssynpunkt.

Boken är sakligt skriven och delvis hållen även i populär form, varför man har både nytta och nöje av att läsa den. Illustrationerna uppgå till ett åttiotal.

C. J. Östman.

Knut Lundmark, *Livets välde I.* A. Bonnier, Stockholm 1935, 342 sid., kr. 12: 50.

I föreliggande arbete behandlar prof. Lundmark i stort sett samma frågor som i ett tidigare verk, nämligen *Världsrymdens liv*, utkommet år 1926 i skriftserien *Vad vi veta* på J. A. Lindblads förlag. Man må härav ej draga den slutsatsen, att har man läst den förra, så behöver man ej läsa den senare. Tvärtom skulle jag vilja rekommendera att läsa de båda böckerna vid sidan av varandra och jämföra 1926 års tydning av de astronomiska gåtorna med de tio senaste årens rön och erfarenheter. Astronomien är ej en vetenskap, som stått stilla under den tiden.

De första 114 sidorna har författaren ägnat åt frågan om livets ursprung och utbredning i världsalltet, och vi få här en detaljerad skildring av olika åsikter om livets uppkomst och utveckling och av de olika varelsernas — därvid först och främst bakteriernas —

levnadsvillkor och förmåga att uthärda kyla och andra ogynnsamma förhållanden. Det kan nog tyckas egendomligt att påträffa rent biologiska spörsmål behandlade av en astronomiprofessor i ett populärt hållet arbete, men det intressanta problemet panspermi eller uralstring löses säkerligen icke medelst ensamt biologiska metoder utan fordrar ingående kunskaper i alla naturvetenskaperna.

Det därpå följande kapitlet om »astronomisk hembygdsforskning» är bokens intressantaste del och innehåller en utförlig redogörelse över den moderna astronomiens forskningsmetoder och resultat beträffande förhållandena på planeterna. Särskilt våra grannplaneter Mars och Venus hava under de senaste åren varit föremål för »hembygdsforskande» astronomers studier och även lockats att avslöja en hel del av sina hemligheter rörande atmosfärernas sammansättning och temperatur m. m.

I bokens sista avdelning få vi en kort översikt över den nyare atomfysiken och dess tillämpningar inom astronomien. Vi få även göra bekantskap med metoderna för vintergatans utforskning och nutida åsikter om universum.

Boken är populärt hållen, lättläst och försedd med talrika figurer och planscher. Den har ett bestående värde såsom dokument för 1935 års uppfattning om världsrymden, varför den rekommenderas för skolbiblioteken.

Arbetet kommer under år 1936 att kompletteras med en andra del, omfattande omkring 200 sidor.

Algot Jenvall.

Eduard Welter, *Populär elektroteknik,* övers. fr. tyskan av Erik Hylander, A. Bonnier, Stockholm 1934, 593 sid., häft. kr. 12:—, inb. kr. 15:—.

Arbetet består av två delar, av vilka den förra är ägnad åt »läran om magnetismen och elektriciteten», den senare åt »elektricitetens framställning och användning». I den förra, teoretiska delen tages elektrostatiken som utgångspunkt, därefter behandlas magnetismen, elektriska strömmen och induktionsfenomenen, varefter det hela avslutas med en relativt utförlig redogörelse för elektricitetsledning i gaser och i vakuum. Av den senare, tekniska delen ägnas fem kapitel åt starkströmstekniken — elektriska maskiner, lampor, kraft- och belysningsanläggningar, ugnar och elektrokemiska processer — och de tre återstående åt svagströmstekniken — telegrafi, telefoni och radio. Huvudvikten är tydligt lagd på det starkströmstekniska området.

Det är utan tvivel en mycket svår uppgift, som författaren förelagt sig. Å ena sidan vållar en populär och samtidigt korrekt framställning av teorien stora svårigheter; å den andra är det ej lätt att bland de otaliga tekniska tillämpningarna göra ett representativt urval. Vid ett genombläddrande av föreliggande arbete tycker man sig finna, att författaren behandlat vissa saker väl knapphändigt, under det han på andra ställen låtit framställningen få väl stor bredd. Samtidigt förvånar man sig över, att författaren lyckats inrymma så mycket i boken, och konstaterar med tillfredsställelse, att de senaste framstegen i allmänhet beaktats.

Vid ett noggrannare studium finner man tyvärr åtskilliga otydligheter och fel i framställningen. Utan tillgång till originalet kan man emellertid ej avgöra, huru mycket av detta som bör skrivas på översättarens konto. Här nedan skall några fall påtalas.

I elektrostatikens första kapitel användes ordet spänning, utan att detta begrepp på något sätt definierats eller åskådliggjorts. Beskrivningen av Faraday's försök på sid 24 avviker väsentligt från Faraday's egen i »Experimental Researches». Ett förbiseende får man väl tillskriva en sådan uppgift, som att jordmagnetiska horisontalintensiteten skulle uppgå till 12 à 18 linjer/cm². Definitionerna på magnetiskt moment (s. 56) och temperaturkoefficient (s. 95) förefalla något underliga. Införandet av vektorer i växelströmsteorien göres på ett mindre lyckligt sätt. Det hade varit lämpligt, om vektorernas omloppsriktning varit den allmänt antagna. Fig. 185 kan knappast kallas ett vektordiagram. Att som på sid. 254 göres, demonstrera parallell- och serielindning med ett tvåpoligt schema är pedagogiskt olämpligt, ty i detta fall äro ju de båda lindningstyperna identiska. Avståndet mellan faserna i en trefaslindning är $^2/_3$ poldelning och ej $^1/_3$, som säges på sid. 273. Ankarlindning med ihåliga ledare, som omnämnes på sid 272, utföres veterligen ej.

Det hade varit glädjande, om sådana uttryck som watteffekt och wattförlust undvikits. Benämningarna amperemätare och amperemeter användas jämsides; i regel reserveras ju mätare för integrerande instrument, t. ex. energimätare. Att som i formeln »watt $= \sqrt{3}$ EI» använda måttenheten i stället för storheten själv är mindre lämpligt.

Översättningen är i regel väl gjord. Det hade dock varit önskvärt, att översättaren anlitat elektroteknisk sakkunskap för ett korrekt återgivande av facktermerna. Nu står t. ex. översättning i stället för omsättning, ok i stället för polring, o. s. v.

Som sammanfattning torde kunna sägas, att boken i stort sett

ger en god bild av den moderna elektrotekniken. Då den dessutom är lättläst, bör den lämpa sig väl som komplement till läroböckerna i elektricitetslära.

G. Ödberg.

Einar Österholm, *Matematik för alla.* Natur och Kultur, 1935, 150 sid., häft. kr. 3:—, inb. kr. 3:75.

Boken är avsedd för självstudium och omfattar realskolans kurs från decimalbråk t. o. m. enkla ekvationer av första graden med tillhörande problem, procenträkning, växlar, obligationer, blandnings- och arbetsproblem m. m. Det är de gamla välkända exempeltyperna som förekomma, en del t. o. m. så gamla, att tobakshandlarna själva blanda sina tobakssorter för att få leverera exempel åt intresserade matematikelever. Underliga människor blanda viner och sätta till vatten för nöjet att få räkna ut sprithalten, obligationsprocenten räknas ut med ekvation och till och med om obligationernas nominella värde ställer sig ägaren okunnig. Författaren är givetvis tämligen oskyldig, boken är väl närmast avsedd åt dem, som vilja ha just de kunskaper, som fordras i realexamen, oavsett om de bibringade färdigheterna äro praktiskt användbara eller ej.

Mot en del egendomliga uttryck såsom t. ex. x-bundet och x-fritt tal känner jag mig manad att protestera. Det första uttrycket för väl tanken närmast till en koefficient, men här avses den obekanta termen i dess helhet. Att skriva förkorta och förlänga en ekvation, när man menar dividera och multiplicera dess båda led, är också ett egendomligt tilltag. En matematisk term bör väl betyda en enda bestämd sak och inte ungefär vad som helst.

Förklaringar lämnas rätt sparsamt. Varför tecknet ändras i en parentes med minustecken framför, då parentesen borttages, förklaras ej, inte heller teckenregeln vid multiplikation.

Ändå värre är, när felaktiga sakupplysningar lämnas i ett dylikt arbete. En aktie och en obligation visa ej blott »smärre» olikheter, som förf. påstår. Aktiens värde anges aldrig i % såsom här sker, och ej heller ersättes aktiesäljaren för upplupen ränta, vilket också påstås. Och skulle förf. vilja vara vänlig upplysa om, vilka aktier som ge ränta 2 gånger om året på bestämda data? Att räntetermin för en obligation och en aktie(!) vanligen äro 1 jan. och 1 juli, är också fel. Jag har just framför mig en förteckning på cirka 600 svenska obligationer. Ingen av dem har räntetermin 1 jan. och 1 juli, cirka 40 st. ha 2 jan. och 1 juli, de övriga helt andra data. Vad skall det nu tjäna till med alla dessa fel, andra

att förtiga? Är det så svårt att ta reda på en sak, innan man skriver, eller anses det, att det inte är så noga, för att det bara är matematikuppgifter?

Skulle boken, som mähända fyller ett behov, utkomma i någon mer upplaga, borde i varje fall kapitlet om aktier och obligationer omarbetas av någon sakkunnig person.

Bengt E. Nyström.

Friberg-Norgren, *Folkskolans naturlära.* Första delen, 248 sid., kr. 1:75. Andra delen, 231 sid., kr. 1:75. Svenska bokförlaget, Stockholm 1935.

De flesta av folkskolans läroböcker ha väl tillkommit på så sätt, att manuskriptet författats av en person, förtrogen med folkskolan och dess undervisning, varefter — åtminstone ibland — detta manuskript överlämnats för granskning till någon på området ifråga speciellt sakkunnig. Beträffande nu till anmälan föreliggande bok har förlaget förfarit i omvänd ordning, åtminstone vad de fysikaliska och kemiska delarna angår. Dessa partier ha författats av lektor Ernst Herlin, varefter manuskriptet granskats ur folkskolepedagogiska synpunkter.

Tidskriftens redaktör har önskat en anmälan av vissa partier av boken i dessa spalter. Undertecknad Sedström har därvid åtagit sig att genomse den fysikaliska delen och undertecknad Nordwall den kemiska.

Vad då fysiken beträffar, så finns det ur saklig synpunkt inte så mycket att säga. Arbetet är utfört med omsorg och den språkliga dräkten är i ovanligt hög grad oklanderlig. Att figurerna över bildalstringen i buktiga speglar råkat komma med i det skick, vari de befinna sig, är väl lektor Herlin mest förvånad över själv. Inte heller är definitionen på brännpunkten vare sig hos en buktig spegel eller hos en lins tillfredsställande. Ytterligare ett och annat i samma stil skulle nog kunna anföras, men då tidskriftens redaktör av utrymmesskäl önskat en kort rec., så skall jag inskränka mig till ett par påpekanden av mera principiell innebörd.

Först ett par ord om en sak, som länge legat mig om hjärtat. Anmärkningen i fråga drabbar alltså inte enbart föreliggande lärobok. Mycket ofta finner man följande lärogång vid frågan om kroppars utvidgning genom värme. Efter en hastig undersökning av 1) en fast kropp, 2) en vätska och 3) en gas drager man utan att blinka följande slutsats: Av de försök vi gjort framgår, att en kropp utvidgar sig vid uppvärmning och sammandrager sig vid

avkylning. — Vad som gör mig betänksam, är egentligen inte det, att slutsatsen är felaktig. Vore det inte värre än så, ginge det väl an. Det är den ödesdigra böjelsen för otillåtna generaliseringar och schablonmässiga uttalanden, som uppammas genom dylika s. k. slutsatser. Och denna böjelse är stor nog och verkar alldeles tillräckligt förvillande på våra omdömen om företeelserna omkring oss — tyvärr inte bara de fysikaliska — även skolböckernas bön förutan.

Slutligen skulle jag framför allt vilja uttala det önskemålet, att omfånget väsentligt minskades. Jag anmärker inte precis på antalet sidor — därav kan ju svårighetsgraden ingalunda bedömas — men på det *mångahanda*, som bokens fysikaliska del innehåller. Lika litet som en elev i realskolan skall lukta på allt det, som läses i gymnasiet, lika litet skall en folkskolans lärobok i samma mening vara en förkortad upplaga av realskolans. Kanske är det möjligt för en intresserad och begåvad elev på det åldersstadium, det här är fråga om, att jaga igenom det mesta av innehållet. Men så är det *inte* meningen, att den ytterst ringa tid, som även i folkskolans bästa former kan anslås åt fysikundervisning, skall användas. Det må tillåtas mig att uttala det önskemålet — och jag tror mig därvid ha det kraftigaste stöd i undervisningsplanen och dess anvisningar — att utgivarna vid förberedandet av nästa upplaga mera måtte beakta den gamla klassiska regeln: non multa, sed multum.

Ernst Sedström.

Lavoisier skrev en gång någonting om att det i kemiska läroböcker är ett vanligt fel, att man förutsätter kunskap om ämnen, som för nybörjaren äro obekanta. Den lärobok för folkskolan, varom nu är fråga, utgör inget undantag från nämnda regel i vad angår dess kemiska partier.

Redan i nybörjarkursens andra försök, som avser att visa en kemisk förenings sönderdelning, tillgripes såsom material det för barnen alldeles främmande ämnet kvicksilveroxid; för övrigt är ej blott själva ämnet okänt, utan begreppet oxid är till på köpet ännu oförklarat. Andra i kursens start (del I) sålunda föregripna ämnen äro t. ex. saltsyra och svavelsyra, vilkas framställning och egenskaper först i del II avhandlas. I sistnämnda del anteciperas på samma sätt t. ex. salpetersyra (sid. 181) och glycerin (sid. 196). Det talas här ock om kaliumklorat, kaliumnitrat och kaliumklorid utan att någonstans i hela kursen grundämnet kalium blir känt eller ens i och för sig nämnt, och på samma sätt ordas om natriumklorid och natriumkarbonat med fullständigt ignorerande av na-

trium. Natron och kali beskrivas visserligen vid deras introduktion, men hur de erhållas förtiges alldeles, frånsett upplysningen, att natron förekommer i handeln. Namnet kolsyra införes, innan det ännu visats, att gasen kan bildas genom förbränning av kol och att den med vatten bildar en syra; i en kurs med ordnat kemiskt vetande som mål måste ett sådant förfaringssätt ogillas.

I fråga om ämnenas sammansättning göras i kursen talrika påståenden utan bevis. Såsom exempel på kemiska föreningar upprräknas redan i början flera substanser, bland dem glas och salt, om vilka ännu inget som helst bevis lämnats att de äro sammansatta ämnen. Koksaltet kallas senare natriumklorid och saltsyran klorvätesyra, men deras sammansättning av resp. grundämnen bevisas aldrig, liksom knappast heller salpeterns och salpetersyrans eller ammoniakens. Och dock kan, beträffande de sistnämnda, oxidation av såväl luftkväve som ammoniak till nitrös gas med även för folkskolan tillgängliga medel utföras och borde med hänsyn till dessa reaktioners stora både kemiska och biologiska betydelse här visas.

Det fundamentala försöket angående luftens beståndsdelar måste, såsom det i boken arrangerats, anses förfelat, eftersom värmet från den brinnande metallen (magnesium) utdriver luft, innan kärlet tillslutits, och eldsläckande gaser lätt bildas av den upphettade korken. Vad förbränning är, blir alltför abstrakt och obestämt utrett; viktökningen vid metallers förbränning visas ej; det rör sig i förbränningsläran om idel gasformiga förbränningsprodukter. Gaskemien kommer för hastigt på, också det ett vanligt fel i läroböckerna och en orsak till annan synd mot didaktisk lag.

Kemikursens båda sista kapitel ge en i det hela god, delvis ypperlig framställning av tillämpad kemi. Men denna förtjänst uppväger ej de brister, som vidlåda de grundläggande kapitlen, brister, som visserligen i rikt mått återfinnas i andra läroböcker men vilkas avhjälpande just borde vara en ny läroboks huvuduppgift, den uppgiften alltså att ge en empiriskt sammanhängande kunskap — erfarenhetskunskap — i den rena kemiens elementer. En sådan kunskap och ej en dogmatisk är vad folkskolans barn behöva. Såsom ett framsteg härutinnan torde ifrågavarande läroboks kemiska avdelningar ingalunda kunna betecknas.

J. F. Nordwall.

Ernst Foghammar, *Matematiska skrivningsuppgifter för latingymnasiet.* A. B. Seelig, Stockholm 1935, 118 sid., kr. 2:40.

Detta häfte innehåller ett mycket stort antal övningsuppgifter och skrivningsuppgifter (numerären är 783 stycken) å latinlinjens matematikkurs enligt senaste, för närvarande gällande stadga, alltifrån ekvationer av första graden med en obekant. Överensstämmelsen med kursplanerna poängteras genom de utdrag av såväl »Kungl. Maj:ts stadga av den 22 mars 1935» som ock »Kungl. Skolöverstyrelsens anvisningar av den 21 aug. 1933 och av den 18 maj 1935», vilka återfinnas i häftet, effektivt åstadkommande, att läraren städse må hava dessa stadgor för ögonen.

Jag har ej i detalj genomgått dessa problem, endast några små randanmärkningar må här göras. I kapitlet om rymdgeometrien, som läses i ring I^4, förekomma problem, där svar erhållas av sådan typ som exempelvis $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$, vilka icke på det stadiet eller annorstädes på latinlinjen numera kunna behärskas. För inskrivna tolvhörningens sida ges det omedelbart erhållna uttrycket $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, vilket förf. utan vidare sätter lika med $\frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, utan att någon anvisning gives, hur ett dubbelt irrationellt uttryck i visst fall kan förvandlas till ett enkelt irrationellt sådant. Vid utredningen om serier kallar förf. generellt varje geometrisk serie med $k < l$ för konvergent, då ju därmed menas en *oändlig* serie, vars summa har ett *ändligt* gränsvärde.

Problemsamlingen är som sagts synnerligen rikhaltig; den innehåller både lätta och svåra uppgifter, kanske måste några betecknas som väl svåra, men i stort sett synas problemen vara väl avpassade, varför läraren givetvis får god hjälp av häftet vid utarbetandet av skrivningar. Förf. tyckes dock mena, att denna exempelsamling skall anskaffas av eleverna, då han säger, »att arbetet även skall kunna användas som repetitorium strax före studentexamen». Under sådana förhållanden minskas dock användbarheten av häftet för skrivningarna, ty det synes mig minst sagt vanskligt att sätta uppgifternas facit i händerna på de skrivande. I så fall borde väl skrivningsuppgifternas svar ha tryckts i ett separat häfte, vilket icke försäljes till eleverna.

Elis Hjalmar.

Meddelande om ny materiell, häft. 10. P. A. Norstedt & Söners skolmateriellavdelning, Stockholm 1935, 32 sid., kr. 1:—.

Häftet inledes med en redogörelse för en enkel och trevlig pendelapparat för bestämning av tyngdkraftens acceleration, konstruerad av fil. mag. B. Pettersson, Luleå.

I denna tidskrift har fil. mag. F. Gunneson tidigare beskrivit (årg. *13*, sid. 102 och *14*, sid. 163) en kalorimeter av massiv koppar. Norstedt & Söner har nu övertagit tillverkningen av denna kalorimeter, och i samband med tillkännagivandet härom lämnas en del siffermaterial, erhållet vid bestämning av vattnets ångbildningsvärme. Samme förf. redogör även för en anordning för bestämning av metallers smältpunkt.

Firman tillverkar numera i egen verkstad en spektrometer enligt anvisningar av lektor T. Wetterblad, som i häftet ingående beskriver densamma. — En billig och utmärkt optisk spalt har konstruerats av adjunkt C. Rendahl.

Nya modeller av vridspolgalvanometrar, elektrodynamometrar och mjukjärnsampèremetrar samt moderna elektriska mätinstrument och en mindre kopplingstavla för likström omnämnas. Vidare en serie spolar, avsedda bl. a. för de växelströmsförsök, som adjunkt C. Rendahl redogjort för i septemberhäftet 1935 av denna tidskrift.

Såsom nyheter äro vidare att notera en ny kapselluftpump och en tryckluftapparat för akustiska försök och en modern spärrskiktsfotocell.

Häftet avslutas med en astronomiavdelning, där folkskollärare S. Dahl ger noggranna anvisningar angående det av honom konstruerade gyrotelluriet och adjunkt A. Jenvall redogör för några nya demonstrationsapparater; se denna tidskrift årg. *17*, 1934, sid. 168 och 230.

Edvin Jönsson.

Hjalmar Olson, *Plan geometri*, 5:e uppl., J. Beckman, Stockholm 1935, 134 sid., kr. 3:—.

Mångårig erfarenhet har övertygat mig om denna läroboks stora förtjänster. Framställningen är enkel, logiskt otadlig så långt man kan begära av en lärobok för realskolan. Samtidigt är den så skriven, att man utan svårighet kan inskränka sig till de viktigaste satserna, vilket vi ju nu äro tvungna till vid våra allmänna läroverk. Vid denna stympade framställning, där åskådning i stor utsträckning måste träda i stället för bevis, har det känts tryggt, att bevisen även för mera perifera satser funnits i boken, och ibland har man kunnat genomgå dem kursivt. Fullständigheten i

framställningen möjliggör bokens användning vid repetitionen å gymnasiet. Lämplig även för våra nuvarande förhållanden är det betyg, jag utan tvekan ger.

Man blir därför något förvånad, då man finner, att boken fått dela alla andra geometriböckers (för realskolan) öde och blivit ställd på avskrivning av lärobokssakkunniga. Förmodligen få de sitt förslag igenom, och följden blir väl den, att författaren nödgas bryta den logiska satskedjan och skära bort så mycket, att man går miste om de ovan framhållna fördelar, som en fullständigare framställning erbjuder. Och för repetitionen på gymnasiet? Ja, för den får väl ett komplement utarbetas. De två böckerna bli tillsammans säkerligen dyrare än den nuvarande boken. Och den nya förkortade upplagan blir nog inte så värst mycket billigare på grund av förkortningen.

Undervisningen har intet att vinna på denna omläggning.

I förordet till den 5:e uppl. har förf. givit anvisning på de satser, som böra läsas med bevis, de som böra inläras genom åskådning eller med experimentell metod och de satser som kunna förbigås.

C. E. Blom.

Gradualavhandlingar.[1]

Sven Gellerstedt, *Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte,* Upsala 1935, 99 sid. Disp. i Upsala den 21 sept. 1935. Opponenter: professor E. Holmgren och fil. lic. Sven Täcklind.

Differentialekv. $y^m z_{xx} + z_{yy} - cz = F(x, y)$ (E)

är »av den första blandade elliptisk-hyperboliska typen», förutsatt att m är ett positivt tal så beskaffat att $(-y)^m = -y^m$; c antages vara en konstant.

Betrakta så ett område D, som erhålles på följande sätt: drag från en punkt E i det »hyperboliska halvplanet» ($y < 0$) tvenne karaktäristiker, vilka träffa x-axeln i punkterna A och B, samt förbind dessa medelst en godtycklig kurva C, förlöpande helt och hållet i det »elliptiska halvplanet» ($y > 0$). Härigenom erhålles ett slutet gebit $ACBEA = D$, och problemet består i att finna en i D definierad lösning $z(x, y)$ till (E), som på C och det ena av karaktäristiksegmenten, t. ex. AE, reduceras till givna värdefölj-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

der $\varphi(s)$ resp. $\psi(s)$ (s = båglängden). — Samma problem är förut behandlat av TRICOMI för fallet $m = 1$, $c = F = 0$.

Antag $z_y(x, 0) = \nu(x)$, och beteckna med D_1 och D_2 de delar av D, som falla i det elliptiska resp. i det hyperboliska halvplanet. Förf. bevisar då först (i kapitlen 1 och 2) existensen av lösningarna $z_1(x, y)$ och $z_2(x, y)$, definierade i D_1 resp. i D_2 av värdeföljderna $\varphi(s)$ och $\nu(x)$, resp. av $\psi(s)$ och $\nu(x)$. Detta sker genom att bestämma GREENS funktion för de resp. problemen och ekv.:

$$y^m z_{xx} + z_{yy} = 0,$$

vilket medfört, att framställningen i jämförliga delar kunnat göras avsevärt kortare än hos TRICOMI, som bestämt z_1 och z_2 medelst serieutvecklingar och inversioner. — För att vid bestämningen av GREENS funktion i det elliptiska gebitet erhålla integralekvationer på vilka FREDHOLMS teori kan tillämpas, måste förf. emellertid om kurvan C göra antaganden av tämligen speciell art, nämligen att C börjar och slutar med tvenne små bågar tillhörande en viss analytisk kurva, »normalkurvan». Detta antagande, som även TRICOMI gjort, kan visserligen ersättas med ett annat något mindre speciellt men ej helt släppas.

I det tredje och sista kapitlet bestämmer förf. funktionen $\nu(x)$ ur likheten $z_1(x, 0) = z_2(x, 0)$, som är en integralekvation »av blandad typ», men, under det att lösningen z_1 kan definieras åtminstone för alla positiva c och z_2 för alla c, måste förf. här antaga, att $|c|$ är tillräckligt litet.

Sålunda erhålles en i D definierad lösning till (E), entydigt bestämd av randvärdena φ och ψ.

RUDOLF JUNELL, *Über die gegenseitige Umlagerung der aci- und nitro-Formen aliphatischer Nitroverbindungen*, Uppsala 1935, 142 sid. Disp. i Uppsala den 9 nov. 1935. Opponenter: docent ARNE FREDGA och fil. mag. EVALD SAMÉN.

Avhandlingen inledes med en historisk översikt av vilken framgår, att de alifatiska nitroföreningarna, allt sedan den första dylika 1872 framställdes av V. MEYER, under långa perioder varit föremål för ivrigt forskningsarbete av framstående forskare, vilkas intresse därvid särskilt samlat sig kring dessa föreningars saltbildning och de i samband därmed skeende omlagringarna.

Alifatiska nitroföreningar kunna nämligen bilda salter, ehuru de ej f. ö. besitta sura egenskaper.

Vid saltbildningen, som ej går momentant, omlagras nitroföreningen till en form, vilken av HANTZSCH betecknas som *aci*-form. Surgöres ett salt av nitroföreningen erhålles först *aci*-formen,

som sedan mer eller mindre fullständigt omlagras till den äkta nitroföreningen, för vilken författaren infört beteckningen *nitro*-form. Denna sista omlagring är för de flesta nitroföreningar åtföljd av en långt gående sönderdelning av molekylen. Vid de rena nitroalkylerna har man ej lyckats isolera den fria *aci*-formen men väl vid aromatiskt substituerade sådana såsom fenylnitrometan. *Aci*-formen visar sig som en äkta syra och ger momentant salter med alkali. Vidare bromeras den, liksom saltet, momentant, under det att nitroförening, som kommit till jämvikt i sur lösning, bromeras endast så långsamt, att den ansetts resistent mot brom, ända till dess professor Ramberg 1922 visade, att nitrometan i starkt bromvätesur lösning förbrukar brom, om ock mycket långsamt.

Utgående från denna iakttagelse har sedan författaren utfört en kinetisk undersökning över bl. a. bromeringshastighten för nitrometan CH_3NO_2, nitroetan $C_2H_5NO_2$ och sek. nitropropan $C_3H_7NO_2$ i bromvätesura lösningar.

Reaktionshastigheten visade sig vara oberoende av bromkoncentrationen men direkt proportionell mot nitroföreningens koncentration.

Den monomolekylära hastighetskoefficienten var vid 70° C (nat. log) i 1-n HBr för nitrometan $36 \cdot 10^{-5}$ och för nitroetan $25 \cdot 10^{-5}$ samt vid 60° för sek. nitropropan $3 \cdot 10^{-5}$.

När bromen utbyttes mot klor erhölls exakt samma värde på reaktionshastigheten.

Dessa resultat tolkas så, att det hastighetsbestämmande vid dessa reaktioner är nitroföreningens omlagring till *aci*-form. Allt efter som denna bildas, bromeras resp. kloreras den, varför brom- resp. klorförbrukningen endast blir en indikator på omlagringen *nitro*- till *aci*-form.

I alkaliska lösningar kan naturligtvis denna omlagring ej följas med bromförbrukningen, utan därför har en hel del försök gjorts att följa denna omlagring med fysikaliska metoder, vilka dock ej lämnat några resultat av större värde.

Författaren har istället använt sig av bromtitrering, vilken gav noggranna och reproducerbara resultat. På grund av att dessa försöksserier i många fall förlöpa med mycket stor hastighet (halvomsättning på mindre än 10 sek.) utfördes försöken i en Erlenmeyer-kolv, i vars botten en ås blåsts upp, så att kärlet kom att delas i två rum. På var sida om åsen inpipetteras lut och lösning av nitroförening, varefter dessa genom kraftig skakning av kolven blandas ögonblickligt. Reaktionen avbrytes sedan genom att på en gång överskott av brom i bromvätesyra hastigt tillsättes,

varvid närvarande *aci*-form momentant bromeras, samtidigt som lösningen blir så starkt sur, att den återstående *nitro*-formen ej omlagras till *aci*-form. Oförbrukad brom titreras med arseniksyrlighet och bromat.

Försöken gåvo till resultat, att hastigheten vid nitroföreningarnas saltbildning är direkt proportionell mot koncentrationen av både lut och *nitro*-form.

Den bimolekylära hastighetskoefficienten vid 0° C är för nitrometan 170, för nitroetan 35 och för sek. nitropropan 2.

Den inversa reaktionen, d. v. s. omlagringen från *aci*- till *nitro*-form studerades även, och då genom att salt av nitroföreningarna sönderdelades i sura buffertar, varvid i övrigt samma metodik användes som vid studiet av saltbildningen. Det visade sig då, att för nitroetan gick omlagringen från *aci*-form kvantitativt till *nitro*-form i acetatbuffertar och mindre sura buffertar, under det att omlagringen i surare buffertar var åtföljd av en sönderdelning av nitroföreningen, som gjorde sig mer gällande ju surare bufferten var. Ännu i monoklorättiksyrebuffertarna stannade dock detta sönderfall vid sådana belopp, att användbara serier kunde erhållas. I saltsyra, även starkt utspädd sådan, var däremot sönderfallet starkt störande.

Vid nitrometan däremot gick omlagringen rent ännu i 0,04-n saltsyra under det att sek. nitropropan till största delen sönderdelades redan i så svagt sura buffertar som av lika delar prim. och sek. fosfat.

Försöken visade, att reaktionshastigheten är direkt proportionell mot koncentrationen av *aci*-formens ion och, för buffertar av en och samma buffertsyra, proportionell mot buffertsyrans koncentration. De olika buffertsyrornas katalysverkan visade sig variera med deras styrka så, som Brönsteds teori för allmän syre- och baskatalys fordrar, varvid syre- och basbegreppet definieras enligt Brönsted.

I samband med dessa försök bestämdes även *aci*-nitrometanens sanna dissociationskonstant till $6 \cdot 10^{-4}$ och *aci*-nitroetanens till $7 \cdot 10^{-5}$.

I buffertar av lämplig surhetsgrad studerades även jämvikten mellan *aci*- och *nitro*-form, varvid jämvikten realiserades från båda hållen i fosfat- och boratbuffertar med $p_H = 8 - 11$. Därvid bestämdes apparenta dissociationskonstanten för nitrometan till $0{,}25 \cdot 10^{-10}$ och för nitroetan till $25 \cdot 10^{-10}$.

Avhandlingen avslutas med en sammanställning och diskussion av olika uppfattningar om *aci*-formens byggnad och mekanismen vid *aci*- och *nitro*-formernas inbördes omvandlingar.

Sten von Friesen, *Precision Measurements of Electron Wave Spectra* with a determination of the Electronic Charge and Planck's Constant. Uppsala 1935. 56 sidor. Disp. d. 4 dec. Opponenter: doc. H. Alfvén och fil. mag. Philip Haglund.

Davisson och Germer påvisade 1927 experimentellt, att en i rörelse stadd elektron åtföljes av en elektronvåg, vars våglängd λ är beroende av elektronhastigheten v enligt de Broglies lag $\lambda = \frac{h}{mv}$, där m betecknar elektronens massa och h Plancks konstant. Experimentella arbeten av olika forskare, utförda under de närmast följande åren, bekräftade giltigheten av denna lag. Den noggrannhet, som uppnåddes vid våglängds- och hastighetsbestämningarna, var av storleksordningen omkring en procent. En avsevärd ökning av noggrannheten syntes komma att bli besvärlig och tidsödande, och man övergav därför allmänt detta forskningsområde för att istället ägna sig åt det nya hjälpmedlets utnyttjande för kristallografiska undersökningar.

Författaren av denna avhandling ansåg emellertid en precisionsmätning av elektronvåglängder vid noggrant definierade volthastigheter hos elektronerna vara av stort intresse ur flera synpunkter och företog därför en sådan mätning.

Det spänningsfall, som accelererade elektronerna, erhölls med hjälp av en högspänningstransformator med kondensatorer och likriktarrör i spänningsfördubblingskoppling. Till denna anläggning kopplades en utjämningskrets innehållande bland annat ett elektronrör, som neutraliserade förändringar i spänningen till följd av variationer i primärspänningen eller belastningen. Den erhållna högspänningen (18—26 000 volt) hölls härigenom konstant på ett par volt. Den mättes med kompensationsapparat mot ett normalelement. Noggrannheten i spänningsmätningen beräknades till $\pm 0{,}5$ ‰.

Som gitter vid våglängdsmätningarna användes en blyglanskristall, som etsats i saltsyra. Efter etsningen skjuta små kuber och rätvinkliga parallellepipeder ut från ytan. Elektronstrålen, som faller in mot kristallen under strykande vinkel, passerar genom dessa utskjutande kristaller. På en fotografisk plåt uppställd i strålningens väg erhålles interferenser av korsgittertyp. Interferensmaxima äro synnerligen skarpa och medge en noggrann mätning av avböjningsvinklarna. Gitterkonstanten för blyglans är väl känd, och våglängden kan sålunda beräknas. Felet överstiger icke ± 1 ‰.

Om man antar de Broglies ekvation riktig och kombinerar den med den teoretiska formeln för Rydbergs konstant, får man fram

uttryck för elektronladdningen e och Plancks konstant h, som utom värdena för våglängden och accelerationsspänningen endast innehålla mycket noggrant kända storheter. På så sätt erhölls värdena:

$$e = (4{,}796 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-10} \text{ e. s. e.}$$
$$h = (6{,}610 \pm 0{,}012) \cdot 10^{-27} \text{ erg. sek.}$$

Dessa resultat ha ett speciellt intresse därigenom, att man fått möjlighet att med en ny metod avgöra den gamla striden om huruvida MILLIKANS oljedroppsvärde $e = 4{,}770 \cdot 10^{-10}$ e. s. e. eller det av BÄCKLIN ur absolutmätningar av röntgenvåglängder erhållna värdet $e = 4{,}805 \cdot 10^{-10}$ e. s. e. är det riktigare. Skiljedomen har utfallit till förmån för det högre värdet på elektronens laddning.

Vidare har överensstämmelsen mellan de e-värden som beräknats ur mätningar vid olika elektronhastigheter visat, att formen på de Broglies lag är riktig.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgives av Svenska Kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. 47 (1935, forts.) N:r 8 (aug.): P. KLASON, Om tångarternas kemiska sammansättning. — H. ERDTMAN, Phenoldehydrierungen VI. Dehydrierende Kupplung einiger Guajakolderivate. — N:r 9 (sept.): S. HÄHNEL, Volumetrisk bestämning av några karbonylföreningar. I. Litteraturöversikt. — N:r 10 (okt.): G. BERG och B. HOLMBERG, Etyllignin och tioglykolsyra. — N:r 11 (nov.): S. HÄHNEL, Volumetrisk bestämning av några karbonylföreningar. II. Bestämning av acetaldehyd enligt bisulfitmetoden. — Referat och översikter. — Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XVI, dubbelh. 3—4.

Ur innehållet. E. JOHANSSON, Om meteoriter och meteorkratrar; J. M. RAMBERG, Om jordens inre; N. V. E. NORDENMARK, Den franska gradmätningen i Torneå 1736—37; Y. ÖHMAN, Nya rön angående förmörkelsestjärnor; B. LINDBLAD, Internationella Astronomiska Unionens kongress; B. SVENONIUS, Helwans observatorium.

Era. Årg. 1935 h. 9—12, årg. 1936 h. 1—2.

Ur innehållet. Stationär vägbelysning; Porjus 25 år; Koivukoskiverket, en märklig finsk vattenkraftanläggning; Eldrift i ved-,

koks- och gaskök; Kanthal, det nya svenska motståndsmaterialet; Normandie, Eldrift på den nya franska atlantjätten; Köksmotorn; Ett stort antal elektriska nyheter.

Tidskrift för ljuskultur. Årg. 1935, h. 3—4; 1936, h. 1.

Ur innehållet. Ljuskopiering med kvicksilverljus; Efterliknande av dagsljusfärg genom blandning av två ljusfärger; Urladdningslampornas frammarsch; Något om ljusalstringens historik; Om felkällor vid ljusmätning med Ulbrichts klot; Gråskalan, ett enkelt instrument för bestämning av reflexionsfaktorer; Mätning av färgat ljus; Belysningstekniska nyheter.

IVA, utg. av Ingenjörsvetenskapsakademien. Årg. 1936, h. 1.

Ur innehållet. Institut för mätteknik; Aceton ur kalciumacetat; Nomenklatur för bergolja och bergoljeprodukter; Hur stora förluster vållar korrosionen?; Ljuskänsliga celler och deras användning inom mättekniken samt för industriella ändamål.

Matematisk Tidsskrift. København 1935 h. 2—4.

Ur innehållet i avd. *A.* J. Hjelmslev, Arealærens principielle Betydning i Euklides Geometri; K. R. Buch og S. B. Bundgaard, Om komplexe tals multiplikation; D. Fog, Hele komplexe Tal; H. C. Espensen, Om rette Linjer og Cirkelbuer, som skall gå gennem skjulte Vinkelspidser; T. Kornerup, Den gyldne Elipse; Avd. *B.* A. S. Bang, Om tal av formen $am + bm - cm$; B. Jessen, Abstrakt Maal- og Integralteori; H. Bohr, En Sætning om Fourierrækker; S. Tachahashi, On the formal Integration of the Fourier Series of an Almost Periodic Function; H. Busemann und W. Feller, Bemerkung zur Differentialgeometrie der konvexen Flächen II; Opgaver; Litteraturanmeldelser.

Fysisk Tidsskrift. København 1935 h. 3—6, 1935 h. 1.

Ur innehållet. B. T. Johansen, Atomar Brint; K. O. Pedersen, Om den Svedbergske Ultracentrifug.

Häftena 4—6 äro tillägnade prof. Niels Bohr på hans 50-årsdag den 7 okt. 1935. Ett stort antal nuvarande och f. d. elever och medarbetare lämna här sin hyllning i form av uppsatser behandlande aktuella problem inom atomfysiken: Atom- og Kvanteteoriens Udvikling, Den elektriske Elementarladning og Kvanteteorien, Kvanteteori og Feltfysik, Om Neutronen, Atomkærnernes Egenskaber og Opbygning, Højdestraalingen, Absorption av Røntgen- og γ-Straaler, Isotopeffekten i molekylspektrene, Isotoper, Om Positronteorien, Den elektriske Lysbue, Atomernes Størrelse, m. m.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Oslo 1935 h. 2—4.

Ur innehållet. P. Ottestad, Metode til beregning av kvadratroten av ett tall, særlig med sikte på anvendelsen av regnemaskin; W. Ljunggren, Bemerkungen über die Lösungen der unbestimmten Gleichung $x^2 - D y^4 = 1$; B. Bjerke, Essene i bridge og Sannsynlighetstabell for de forskjellige kortfordelinger i bridge; Th. Skolem, Nogen additiv-tallteoretisk betraktninger; Opgaver; Boganmeldelser.

Uppsatser med matematiskt-naturvetenskapligt innehåll under år 1935 i följande till red. insända tidskrifter:

Den Høire Skole, Oslo: A. K. Brynildsen, Et enkelt forsøg som demonstrerer Guldberg og Waages lov; O. Ingebrigtsen, Teori og anvendelser i skolematematikken; T. Thorstensen, Matematikken til middelskoleeksamen; O. M. Tahlberg, Norsk Matematisk Forening; M. Hauge, A. C. Føyn, Renteregning og diskontoregning; O. F. Olden, Nye elektriske apparater; E. Johannesen, Artiumsopgavene i matematikk for kandidater med infinitesimalregning; K. Heli, Aritmetikken i de to første år i realskolen og det femårige gymnas; O. Lindstad, Elektrolyse av saltsyre; Den isotermisostere cirkelprocess i Bruun och Deviks Fysikk, diskussion med flera inlägg.

Tidning för Sveriges läroverk: B. E. Nyström, Praktiska problem bättre än algebra?; Algebra kontra ekvationslära av E. Hjalmar (h. 4) med genmäle (h. 5) av Hj. Olson och T. Wetterblad och replik (h. 6) av E. Hjalmar; Den nya undervisningsplanen i matematik: Kommentar av Hj. Olson (h. 8) och »Intryck» av A. Wahlgren (h. 9); Professorernas matematikönskemål (h. 9); J. Haglund, Rymdgeometrien, samarbetsuppgift för tecknings- och matematiklärare (h. 14); Lärobokssakkunnigas B- och C-böcker i matematik, fysik och kemi (h. 23 o. 24); Om examensuppgifterna i fysik v. t. 1935, inlägg i h. 8 samt i h. 10 av B. Jonzon, K. A. Wingårdh.

Skola och Samhälle: A. Bergsten, En rationell lösning av subtraktionsproblemet (sid. 217).

Pedagogisk Tidskrift: N. Löfman, Bidrag till verifikation av Gay-Lussac-Humboldts lag (sid. 150—152).

Föredrag under hösten 1935 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. H. Björk; förman i arbetsutskottet fil. mag. E. Berg.

Föredrag: fil. mag. P. Adolf Herrlin, Några kristallografiska användningar av talteorien ($^{25}/_{11}$).

Fysiska Föreningen, ordf. docent O. Lundquist, sekr. amanuens B. Svensson.

Föredrag: fil. lic. N. G. Johnson, Supraledning ($^{2}/_{11}$); docent N. Ryde, Ur isotopforskningen ($^{14}/_{12}$).

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Lokalavd. i Lund: se sid. 40.

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. amanuens K. E. Thomé.

Föredrag: prof. W. Kuhn (Karlsruhe), Optisk vridning och kemisk konstitution ($^{9}/_{9}$); doc. T. Gustafsson, Om den nya kvantmekaniken ($^{1}/_{11}$).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. doc. S. Wigert, sekr. fil. lic. W. Odhnoff.

Föredrag: doc. S. Wigert, Två funktionsteoretiska satser ($^{23}/_{10}$); doc. R. Rydberg, Något om potentialförhållanden inom tvåatomiga molekyler ($^{9}/_{12}$).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. civiling. C. H. Johansson.

Föredrag: civiling. I. Svedberg, Om den moderna televisionen med demonstration ($^{30}/_{11}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. G. Ising, sekr. fil. lic. E. Fredlund.

Föredrag: fil. lic. G. Funke, Några erfarenheter från studier rörande infraröda spektra vid Fysiska institutet i Darmstadt ($^{30}/_{9}$); dr. W. Krasny-Ergen (Wien), Elektrische Ultrakurzwellen und ihre medizinischen Anwendungen ($^{14}/_{10}$); prof. G. Ising, Några tyngdkraftbestämningar i södra Skåne med en statisk mätapparat ($^{21}/_{10}$);

Forts. sid. 72.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

809) *I en storcirkel på ett klot med radien R är inskriven en triangel, vars inskrivna cirkel har radien r. Beräkna radien i det klot, som tangerar triangelns tre sidor och det ursprungliga klotet.*

X.

810) *Vilka värden kan en treradig, symmetrisk determinant antaga, vars alla tvåradiga huvudminorer äro = 0, och vars huvudelement äro a, b och c resp.? a, b och c äro givna, positiva tal.*

Stig Comét.

811) *Ellipsen* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *och cirkeln* $x^2 + y^2 = r^2$ *äro givna. Bestäm maxima och minima av längden hos den inom ellipsen belägna delen av en rörlig tangent till cirkeln* $(a > b > r)$.

Stig Comét.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

Rättelser: Årg. *17*, s. 270, ex. 788: Alla de obekanta kunna även vara = 2. Ex. 791 bör stå: Visa att, $a^2 = \pm 3(b^2 - c^2)$.

812) Lös ekvationssystemet $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$; $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = 2(x + y)$.

Svar: $x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (båda posit. eller båda neg.).

813) Visa, att uttrycket $tg\,9° + cot\,9° - tg\,27° - cot\,27°$ är ett rationellt tal och bestäm detta.

Svar: 4.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 812, 817—823; 826 äro insända av *X.*; uppg. 813—816, 824—825 av *S. B.*

814) I triangeln ABC inskrives en cirkel, som tangerar BC i P. Bestäm triangelns vinklar, om $PA = 16$ cm, $PB = 15$ cm och $PC = 10$ cm.

Svar: $43°{,}80$; $62°{,}18$; $74°{,}02$.

815) I triangeln ABC inskrives en cirkel, som tangerar BC i P. Vinklarna BAP och CAP äro resp. $37°$ och $11°$. Beräkna vinkeln B.

Svar: $56°{,}18$.

816) I triangeln ABC är $\frac{2}{\cos A} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$. Visa att $B - C = \pm 90°$.

817) En rät vinkels ena ben lutar $30°$ mot horisontalplanet, det andra $45°$. Hur mycket lutar vinkelns plan mot horisontalplanet?

Svar: $60°$.

818) Visa, att summan av kvadraterna på (de fyra) diagonalerna i en parallellepiped är lika med summan av kvadraterna på (de tolv) kantlinjerna.

819) I en parallellt stympad rotationskon äro basradierna 1 och 2 cm samt höjden 2 cm. Konen vilar med den större basytan på ett vågrätt plan och belyses av solen, som befinner sig $45°$ över horisonten. Hur många cm² av manteln belyses, och hur stor är skuggan på horisontalplanet?

Svar: $\pi\sqrt{20} = 14{,}76$ cm² och $\sqrt{27} - \pi = 2{,}054$ cm².

820) En tresidig pyramid har fem kantlinjer av längden a vardera; den sjätte har längden b. Beräkna volymen.

Svar: $\frac{ab}{12}\sqrt{3a^2 - b^2}$.

821) En cylinder med basradien 3 cm och höjden 1 cm är inskriven i ett klotsegment. Bestäm minimivärdet av segmentets buktiga yta.

Svar: $\frac{75\pi}{4} = 58{,}91$ cm².

822) Ett halvklot med 1 cm radie och en sfärisk sektor ha samma volym och samma totala yta. Beräkna radien i den sfär, varav sektorn är en del.

Svar: 2,5 cm.

823) Ett parallelltrapets har sina hörn i $(-6; -1)$; $(2; -1)$; $(3; 1)$ och $(-1; 1)$. Sök ekvationen för den räta linje genom $(4; 5)$ som halverar det givna trapetsets yta.

Svar: $10x + 5 = 9y$.

824) Triangeln OAB har ett hörn i origo O. Ekvationerna för mittpunktsnormalerna till OA och OB äro resp. $3x + y = 10$ och $6x + 8y = -25$. Angiv ekvationen för mittpunktsnormalen till AB.

Svar: $6x + 4y = 5$.

825) I vilken punkt på kurvan $y = x^2 + x + 4$ är subtangenten 2 enheter?

Svar: $(1; 6)$; $(2; 10)$; $(-2; 6)$ samt $(-3; 10)$.

826) Om x och y väljas så, att de positiva talen $2x + y + 1$; $x - 2y - 1$ och $2 - x - y$ utgöra sidolängderna i en triangel, så ligger denna triangels omkrets mellan 3,5 och 14.

Lösningar till uppg. 766—768.

Tillägg: *Ed. Smn.* hade insänt lösning till uppg. 748.

766) *Linjerna l, m och n bilda en triangel med hörnen på kurvan $y(x + 1) = x$. Sidorna råka x-axeln i L, M och N samt y-axeln i L_1, M_1 och N_1 resp. Visa, att $LM : MN = L_1M_1 : M_1N_1$.* X.

Man kan anse sambandet i fråga som ett specialfall av följande allmänna sats: Linjerna l, m och n bilda en triangel med hörnen på en hyperbel. Genom en fjärde punkt på denna dragas två linjer parallella med asymptoterna. Sidorna raka den ena av dessa linjer i L, M och N, den andra i L_1, M_1 och N_1. Då är $LM : L_1M_1 = MN : M_1N_1$.

Hyperbelns ekvation med asymptoterna som koordinataxlar är $xy = k^2$. Koordinaterna för hörnen (lm), (ln) och (mn) äro resp. $\left(x_1; \frac{k^2}{x_1}\right)$, $\left(x_2; \frac{k^2}{x_2}\right)$ och $\left(x_3, \frac{k^2}{x_3}\right)$ samt för den fjärde punkten $\left(a; \frac{k^2}{a}\right)$. Ekvationen för l blir då efter förenkling $y + \frac{k^2 x}{x_1 x_2} = \frac{k^2}{x_1} + \frac{k^2}{x_2}$. Den skär linjen $y = \frac{k^2}{a}$ i $L\left(x_1 + x_2 - \frac{x_1 x_2}{a}; \frac{k^2}{a}\right)$ och linjen $x = a$ i $L_1\left(a; \frac{k^2(x_1 + x_2 - a)}{x_1 x_2}\right)$. På samma sätt fås koordinaterna för M o. M_1.

Alltså blir $LM = \left(x_2 - x_3\right)\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)$ och $L_1M_1 = \frac{k^2(x_2 - x_3)(a - x_1)}{x_1 x_2 x_3}$ samt $LM : L_1M_1 = \frac{x_1 x_2 x_3}{ak^2}$. Av symmetriskäl fås samma värde för $MN : M_1N_1$.

B—r.

Även löst av *S. L.*

767) *Beräkna summan av serien*

$$\left(\frac{\sin^2 2\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2 4\alpha}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2 8\alpha}{8}\right)^2 + \ldots$$

X.

Den n:te termen kan skrivas $\frac{\sin^2(2^n \cdot \alpha)\left[1 - \cos^2(2^n \cdot \alpha)\right]}{4^n} = \frac{\sin^2(2^n \cdot \alpha)}{4^n} - \frac{\sin^2(2^{n+1} \cdot \alpha)}{4^{n+1}}$. Summan av n termer blir alltså $= \left(\frac{\sin^2(2\alpha)}{4} - \frac{\sin^2(2^2\alpha)}{4^2}\right) + \left(\frac{\sin^2(2^2\alpha)}{4^2} - \frac{\sin^2(2^3\alpha)}{4^3}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{\sin^2(2^n\alpha)}{4^n} - \frac{\sin^2(2^{n+1} \cdot \alpha)}{4^{n+1}}\right) = \frac{\sin^2 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2(2^{n+1} \cdot \alpha)}{4^{n+1}}$ och svaret $\left(\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)^2$.

B—r.

Även löst av *S. Wigert* och *S. L.*

768) *I pyramiden PABC är PA = a, PB = b och PC = c. Sidovinklarna i P äro alla 60°. Beräkna avståndet från P till tyngdpunkten för triangeln ABC.* *X.*

Om man genom tyngdpunkten T lägger plan parallella med pyramidens sidoytor, begränsa dessa plan jämte sidoytorna en parallellepiped med kanterna $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ och $\frac{c}{3}$. PT blir då $\frac{1}{3}$ av diagonalen i en parallellepiped med kanterna PA, PB och PC.

P tages till origo, PA till x-axel och PAB till xy-plan. PC bildar med PAB samma vinkel som en regelbunden tetraeders sidokant med basytan; denna vinkels cosinus är $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C:s projektion C_1 i xy-planet får då koordinaterna $\left(\frac{c}{2}; \frac{c^2}{2\sqrt{3}}\right)$ och CC_1 är $= c\sqrt{\frac{2}{3}}$. Koordinaterna för A äro $(a; 0; 0)$, för $B\left(\frac{b}{2}; \frac{b\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, för $C\left(\frac{c}{2}; \frac{c}{2\sqrt{3}}; c\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ och för ändpunkten D av diagonalen PD alltså

$\left(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{2};\ \frac{b\sqrt{3}}{2}+\frac{c}{2\sqrt{3}};\ c\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Således är $\overline{PD}^2=\left(a+\frac{b}{2}+\frac{e}{2}\right)^2+$

$+\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}+\frac{c}{2\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2c^2}{3}=a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$ och $PT=$

$=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$.

B—r.

Även löst av *Anders Larsson, Ed. Smn.* och *S. L.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen.

Januari 1936.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. I en romb är den ena diagonalen 8 cm. Den andra diagonalen är $\frac{1}{6}$ av rombens omkrets. Beräkna rombens höjd.
2. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{1}{y}&=2\tfrac{1}{3}\\ \frac{1}{x}+y&=2{,}1\end{aligned}\right\}.$$

3. Inuti kvadraten *ABCD*, vars sida är 6 cm, är en punkt *F* så belägen, att *FA* är 5 cm och *FB* 4 cm. Beräkna *FD*.
4. I en triangel, vars yta är 30 cm², är den minsta höjden 4 cm. En vinkel är 22°; beräkna de övriga vinklarna.
5. En fond utgjorde 16 000 kr. vid början av år 1918. Ingen utbetalning gjordes under åren 1918—1926, men därefter utdelades ett stipendium på 800 kr. i början av varje år. Hur stor var fonden i början av år 1931, sedan årets stipendium utdelats? Fonden förräntades hela tiden efter 4 %, och räntan lades till kapitalet vid varje årsskifte.
6. I ett parallelltrapets *ABCD*, där *AD* är parallell med *BC*, är diagonalen *AC* 3 cm och vinkelrät mot sidan *AB*, vars längd är 1 cm. Sidorna *AD* och *DC* äro lika långa. Beräkna trapetsets yta.
7. Fyren *A* ligger 8,5 km rakt väster om fyren *B*. Från ett fartyg i *P* synes *A* i NV och *B* i NNO. Fartyget går i rakt nordlig

riktning till Q, varifrån fyren B synes i SO. Beräkna avståndet AQ.

8. Visa, att för varje rätvinklig triangel gäller likheten $T = r\, r_1$, där T är triangelns yta, r radien i den i triangeln inskrivna cirkeln och r_1 radien i den cirkel, som tangerar hypotenusan och kateternas förlängningar.

Resultat: 1. $2\frac{2}{3}$ cm. 2. $x_1 = \frac{5}{3}$; $y_1 = \frac{3}{2}$ och $x_2 = \frac{2}{3}$; $y_2 = \frac{3}{5}$. 3. $\sqrt{61 - 15\sqrt{7}} = 4{,}617$ cm. 4. 38°,11 och 119°,89. 5. 22 308 kr. 6. 2,25 cm². 7. 6,506 km.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

a) *1933 års undervisningsplan.*

1. I parallellogrammen $ABCD$ är $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm och vinkeln mellan dessa sidor 60°. E är mittpunkten på CD och F skärningspunkten mellan sammanbindningslinjerna AE och BD. Beräkna ytan av fyrhörningen $BCEF$.
2. Beräkna det minsta värde uttrycket

$$p = x \cos 120° + y \sin 120°$$

kan antaga, om x och y äro koordinaterna för en rörlig punkt på kurvan $y - 1 = x^2$.

3. Å en egendom finnes — förutom ungskog — avverkningsmogen skog till en sammanlagd kubikmassa av 1 700 000 m³ med en genomsnittlig massatillväxt av 1,1 % per år. Man vill helt och hållet avverka denna del av skogen under en tidrymd av 50 år, på så sätt att årligen lika stor kubikmassa uttages. Därutöver beräknar man en årlig avverkning av 3 900 m³ genom gallring i yngre bestånd. Till huru många m³ per år uppgår skogens hela avkastning under tidrymden i fråga? Kalkylen antages utförd vid början av ett år och avverkningarna kunna tänkas förlagda till årets slut.
4. Två räta cirkulära koner hava gemensam bottenyta och äro vända åt samma håll. Deras toppvinklar äro 47°14′ och 90°, och avståndet mellan topparna är 43,5 cm. Beräkna den mellan konernas mantlar inneslutna volymen.
5. För att rötterna x_1 och x_2 till ekvationen

(1) $$x^2 + px + q = 0$$

skola satisfiera ekvationen

(2) $$x_1^3 + x_2^3 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)$$

måste konstanterna p och q uppfylla vissa villkor. Angiv dessa och pröva resultatet genom att i (2) insätta de värden på x_1 och x_2, som i dessa fall erhållas ur (1).

6. Den kring en triangel omskrivna cirkelns radie är lika med aritmetiska mediet mellan två av sidorna och på samma gång lika med dubbla medelproportionalen till dessa sidor. Beräkna den vinkel sidorna i fråga omsluta.
7. Vilka värden antager funktionen

$$f(x) = \sin 2x + 2 \sin^2 x$$

för de värden på x, som satisfiera ekvationen

$$\cos 2x + 2 \sin x \cos x = 0.$$

8. Sök vinkeln mellan de räta linjer, som gå genom punkten $(3, -3)$ på avståndet 2 från origo.
9. I en cirkel med radien R är en viss rätlinig figur inskriven; dess yta är S och dess omkrets l. I en rät cirkulär kon med basradien R och höjden H är ett rakt prisma inskrivet; dess basytor äro likformiga med den nyss nämnda rätliniga figuren. Huru stor är prismats totala yta, då den är maximum?

Resultat: **1.** $\frac{5\sqrt{3}}{4} = 2{,}165$ cm². **2.** $\frac{11\sqrt{3}}{24}$. **3.** 48 290 m². **4.** 52,04 dm³. **5.** $p = 0$ med rötterna $\pm\sqrt{-q}$; $q = 0$ med rötterna $-p$ och 0. **6.** 65°,07 eller 107°,25. **7.** $1 + \sqrt{2}$ och $1 - \sqrt{2}$. **8.** 56°,25. **9.** $\frac{H^2 l^2}{4(Hl - 2S)}$; möjlighetsvillkor: $Hl > 4S$.

b) *1928 års undervisningsplan.*

Uppgifterna 1, 3—7, 9 utgjordes av motsvarande uppgifter a).

2. I ändpunkterna av parametern till en hyperbel äro tangenter dragna. De skära en av asymptoterna i punkterna A och B. Visa, att mittpunkten av sträckan AB ligger i parameterns förlängning.
8. Genom en rörlig punkt P på parabeln $y^2 = 4ax$ dragas de båda kordor, PQ och PR, som bildar 45° vinkel med parabelns axel. Sök orten för medelpunkten till den kring triangeln PQR omskrivna cirkeln.

Resultat: **2.** Satsen gäller ej endast för parametern utan för en godtycklig hyperbelkorda; beviset är enkelt för kordor parallella med axlarna. **8.** Parabeln $y^2 = 4a(x - 4a)$.

Uppgifter i fysik.

1. Den ena skänkeln av ett U-formigt böjt glasrör är vertikal och jämntjock med 3 cm² inre genomskärningsyta. I röret hälles först så mycket kvicksilver, att detta räcker upp i båda skänklarna. I den vertikala skänkeln hälles sedan 210 g av en vätska samt i den andra skänkeln glycerin med specifika vikten 1,25, så att en 40 cm hög glycerinpelare bildas. Beräkna höjdskillnaden mellan kvicksilverytorna. Kvicksilvrets specifika vikt är 13,6.
2. En kropp, som väger 2 kg, ligger på ett strävt lutande plan. Lutningsvinkeln är 30° och friktionskoefficienten 0,1. Hur stor kraft måste verka på kroppen i horisontell riktning för att dess acceleration uppför planet skall bliva 10 cm/sek²? Accelerationen vid fritt fall är 981 cm/sek².
3. I hörnen 1, 2, 3, ..., 6 av en regelbunden 6-hörning äro anbragta parallella, åt samma håll riktade krafter på respektive 1, 2, 3, ..., 6 kgf. Bestäm läget av dessa krafters medelpunkt.
4. Torv innehåller 90 procent vatten och resten torvsubstans. Man vill nedbringa vattenhalten till 10 procent och för den skull inlägges våt torv, som har 10° temperatur, i en ugn och uttages vid 100° C. Hur stor värmemängd måste tillföras varje kilogram våt torv? Torvsubstansens specifika värme är 0,5 och vattnets ångbildningsvärme 540.
5. Två tunna, konvexkonkava och lika glaslinser placeras med sammanfallande optiska axlar på 1 cm avstånd från varandra. Beräkna avståndet mellan linssystemets båda fokalpunkter. Brytningsindex för glas är 1,5 och de buktiga ytornas radier 3 cm och 6 cm.
6. Ett kikarsikte (kollimatör) består av en smal, massiv glasstav, vars ena ända är plan. Den andra begränsas av en utåt buktig sfärisk yta. I den plana ytan är inristat ett kors, vars mitt sammanfaller med stavens axel. Angiv förhållandet mellan stavens längd och den buktiga ytans radie, då ett ackomodationslöst öga, som betraktar det inristade korset genom den buktiga ytan, förlägger bilden av detsamma oändligt långt bort. Brytningsindex för glas är 1,5.
7. I en shuntmotor är ankarets motstånd 0,1 ohm. Vid tomgång, då motorn icke uträttar något arbete, är motorns strömförbrukning 0,4 amp., vid belastning däremot 10,4 amp. Hur mycket ändras den motelektromotoriska kraften i ankaret genom belastningen? Spänningsskillnaden mellan borstarna i motorn är i båda fallen densamma.

8. Ett batteri består av tre lika, seriekopplade ackumulatorer. Batteriet slutes medelst en yttre ledning, som består av två seriekopplade motstånd, vartdera på 3 ohm. Den punkt *B*, där dessa motstånd äro sammankopplade, förbindes med den punkt *A*, där den första ackumulatorn är ansluten till den andra, medelst ett motstånd av storleken 1 ohm. Man vill ersätta detta med ett större motstånd, vilket skall väljas så, att effekten i det nya motståndet blir lika med effekten i det gamla. Hur stort bör det nya motståndet mellan *A* och *B* tagas? Batteriets inre motstånd kan lämnas utan avseende. Elektromotoriska kraften hos var och en av ackumulatorerna är konstant.

Resultat: **1.** 1,47 cm. **2.** 1,46 kgf. **3.** Medelpunkten delar linjen mellan andra och femte hörnet i förhållandet 9 : 5. **4.** 565,5 kgkal. **5.** 11,48 cm. **6.** 3 : 1. **7.** 1 volt. **8.** 2,25 ohm.

Forts. från sid. 63.

fil. lic. B. Grundström, Några spektroskopiska undersökningar av instabila molekyler ($^{18}/_{11}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. laborator R. Nilsson.

Föredrag: fil. dr. H. Erdtman, Reaktioner under s. k. »fysiologiska betingelser». Modellförsök över naturämnenas biosyntes. ($^{25}/_{10}$); doc. G. Hägg, Röntgenundersökningar av spinellserier och volframbronser ($^{26}/_{11}$); fil. kand. C. Brosset, Röntgenundersökningar av komplexa volframklorider ($^{26}/_{11}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. A. Beurling, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Föredrag: prof. A. Wiman, En stabilitetsfråga inom teorien för de lineära differentialekvationerna ($^{22}/_{10}$); doc. A. Beurling, Wieners allmänna Tauber-teorem ($^{13}/_{12}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Erik Bäcklin, v. ordf. docent Gunnar Kellström.

Föredrag: doc. H. Köhler, Molnens bildning och konstitution ($^{6}/_{11}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. doc. P. Nylén, sekr. docent A. Fredga.

Föredrag: doc. A. Tiselius, Amerikanska reseintryck ($^{17}/_{10}$); fil. lic. H. Fredholm, Metoder för extinktionsmätningar i ultraviolett ($^{15}/_{11}$).

Om ekvationen $x^3 + y^3 = z^3$.

Av HENRIK PETRINI.

I ekvationen

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad xyz \neq 0 \tag{1}$$

antagas x, y, z vara positiva hela tal, och vi skola på rent elementär väg söka en undre gräns för dessa tal. De i det följande införda bokstäverna beteckna hela tal, där ej annorlunda uttryckligen bestämmes. Tydligen är

$$\begin{aligned} &x + y > z, \quad z > x; \quad z > y, \quad \because t = x + y - z > 0 \\ &r = x - t > 0; \quad s = y - t > 0, \quad \because z = r + s + t. \end{aligned} \tag{2}$$

Ekv. (1) blir då

$$t^3 = 6rst + 3rs(r + s), \tag{3}$$

varav följer, att t^3 är delbart med $3rs$. Utan att inskränka på uppgiftens allmängiltighet kunna vi antaga, att x, y, z äro relativa primtal. Av (2) och (3) följer då, att r och s äro relativa primtal. Likaså kunna vi antaga, att t. ex. x inte är delbart med 3, varav följer enl. (2), att även r inte är delbart med 3. Då nu x och z äro relativa primtal, så finner man, att r måste ha formen $r = a^3$, där a är en faktor i t. Ty om r vore av formen $a_1 a_2^2 a^3$, och $t = a_1 a_2 a\tau$, så måste enl. (3) s^2 vara delbart med $a_1 a_2$; $\because a_1 = a_2 = 1$, emedan r och s äro relativa primtal.

Vi ha nu att skilja på två fall: I. y är icke delbart med 3; II. y är delbart med 3.

I. Man finner, då y icke är delbart med 3, att s är av formen $s = \beta^3$, där β är en faktor i t. Ekv. (2) och (3) bli då

$$
\begin{aligned}
&t = 3\alpha\beta\gamma, \quad \because \gamma > 0, \\
&x = \alpha^3 + 3\alpha\beta\gamma, \quad y = \beta^3 + 3\alpha\beta\gamma, \\
&z = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta\gamma = 9\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma,
\end{aligned} \tag{4}
$$

varav följer, att z är delbart med 3. Den sista ekvationen kan skrivas

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta\gamma = 9\gamma^3. \tag{5}$$

Alltså är $\alpha + \beta$ delbart med 3. Nu bli tre av de fyra termerna i (5) delbara med 9; alltså måste γ vara delbart med 3. Sätt då i (5)

$$\alpha + \beta = 3n \text{ och } \gamma = 3c, \tag{6}$$

$$\because \alpha\beta(2c - n) = 27c^3 - 3n^3. \tag{7}$$

Då $\alpha\beta$ inte är delbart med 3, så måste $2c - n$ vara delbart med 3, så att man kan sätta

$$n = 2c + 3h \tag{8}$$

$$\because \alpha\beta = \frac{n^3 - 9c^3}{h} = 9(3h^2 + 6hc + 4c^2) - \frac{c^3}{h}. \tag{9}$$

Då x, y, z äro relativa primtal, så måste enl. (4) α, β, γ och således även α, β, c vara relativa primtal. Alltså måste enl. (9) h och c ha formen (jfr $r = \alpha^3$ s. 1)

$$\begin{cases} h = \mu^3 \\ c = \mu e. \end{cases} \tag{10}$$

För när $\frac{c^3}{h}$ måste vara ett helt tal, så kan man sätta $h = \mu_1\mu_2^2\mu^3$ $c = \mu_1\mu_2\mu_3 e$. Enl. (9) bleve då $\alpha\beta$ delbart med $\mu_1^2\mu_2$ $\because \mu_1 = \mu_2 = 1$ enär $\alpha\beta$ är prim till c.

Av (6), (8), (9), (10) erhålles

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3\mu(2e + 3\mu^2) \\ \alpha\beta = (2e + 3\mu^2)^3 - 9e^3. \end{cases} \tag{11}$$

$$(12)\quad \left.\begin{array}{l} \because \left.\begin{matrix} 2\alpha \\ 2\beta \end{matrix}\right\} = 3\mu(2e + 3\mu^2) \pm \sqrt{A}, \text{ där} \\ A = 9\mu^2(2e + 3\mu^2)^2 - 4(2e + 3\mu^2)^3 + 36e^3 = \\ \qquad = 4e^3 - 27\mu^2(2e + \mu^2)^2. \end{array}\right.$$

Då α och β äro reella, så måste A vara > 0,

$$(13)\quad \because e > 0,$$

och då c är > 0, följer enl. (10)

$$(14)\quad \mu > 0.$$

Lösningen av ekv. (1) hänger alltså pa, om man kan finna ett rationellt tal $\xi = \frac{e}{\mu^2}$ sådant, att

$$(15)\quad \sqrt{\xi^3 - 27\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2} \text{ är ett rationellt tal.}$$

Man finner, om man sätter $A = 0$,

(16) $\xi = \frac{e}{\mu^2} > 27{,}97$ (approx.), för att α och β skola vara reella.

För detta gränsvärde finner man (12)

$$(17)\quad \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\mu^3} = \frac{\beta}{\mu^3} = 3\xi + \frac{9}{2} = 88{,}41 \quad \frac{\gamma}{\mu^3} = 3\xi = 83{,}91, \\ \frac{t}{\mu^9} - \frac{3\alpha\beta\gamma}{\mu^9} = 1\,968\,000, \quad \frac{\alpha^3}{\mu^9} - \frac{\beta^3}{\mu^9} = 691\,000, \\ \qquad \frac{\gamma^3}{\mu^9} = 591\,000. \end{array}$$

Villkoret för att α och β skola ha samma tecken är, att $\alpha\beta$ är > 0, $\because$ enl. (11)

$$(18)\quad (2\xi + 3)^3 > 9\xi^3$$

$$(19)\quad \because \xi < \frac{3}{\sqrt[3]{9} - 2} = 37{,}5 \text{ (approx.).}$$

För $\xi = 37{,}5$ blir $\beta = 1$, som är det minsta positiva värde β kan antaga. Vidare fås för dessa värden

$$(20)\quad \begin{aligned} &\frac{\alpha}{\mu^3} + \frac{1}{\mu^3} = 6\xi + 9 \leqq 234, \quad \because \frac{\alpha}{\mu^3} \leqq 233, \quad \frac{\gamma}{\mu^3} \leqq 112{,}5, \\ &\frac{t}{\mu^6} > 78\,000, \qquad \frac{\alpha^3}{\mu^9} \leqq 12\,800\,000, \qquad \frac{\gamma^3}{\mu^9} \leqq 1\,424\,000. \end{aligned}$$

Enligt (4), (17) och (20) finner man

$$(21)\quad \begin{cases} 2\,659\,000 < \dfrac{x}{\mu^9} < 12\,800\,000 \\ 2\,659\,000 > \dfrac{y}{\mu^9}, \quad \dfrac{y}{\mu^6} > 78\,000 \\ 3\,350\,000 < \dfrac{z}{\mu^9} < 12\,800\,000. \end{cases}$$

Man finner, att α och γ ökas, när ξ växer, men β och t avta.

Om nu $\dfrac{e}{\mu^2} = \xi$ är $> 37{,}5$, så blir β negativt och således y negativt. Detta fall svarar mot ekvationen

$$(22)\qquad x^3 - y_1{}^3 = z^3, \quad y_1 \equiv -y$$

där x, y_1, z antagas vara positiva; z är fortfarande delbart med 3 men är inte längre det största talet. Ekv. (4) kunna nu skrivas

$$(23)\quad \begin{cases} \xi > 37{,}5 \\ t_1 = 3\alpha\beta_1\gamma, \quad \beta_1 = -\beta, \quad t_1 = -t, \quad \because \beta_1 > 0, \quad t_1 > 0 \\ x = \alpha^3 - 3\alpha\beta_1\gamma \\ y_1 = \beta_1{}^3 + 3\alpha\beta_1\gamma \\ z = \alpha^3 - \beta_1{}^3 - 3\alpha\beta_1\gamma = 9\gamma^3 + 3\alpha\beta_1\gamma. \end{cases}$$

I stället för (21) får man, då $\dfrac{\alpha}{\mu^3}$ nu är $= 6\xi + 9 + \dfrac{\beta_1}{\mu^3} \geqq 234$,

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\mu^9} > \dfrac{z}{\mu^9} > 12\,800\,000 \\ \dfrac{y_1}{\mu^6} > 78\,000, \quad \mu \geqq 1. \end{cases}$$

II. Fallet (22) svarar mot det fall i (1) (jfr s. 1), då y är delbart med 3, d. v. s. då det inte är det största talet som är delbart med 3; men beteckningarna y_1 och z bli ombytta.

Även den, som inte känner sig övertygad av de bevis som presterats för att ekv. (1) är orimlig, finner sålunda genom rent elementära betraktelser, att värdena på x, y, z, som eventuellt skulle satisfiera ekvationen, överstiga talen 78 000, 2 659 000 och 3 350 000 och sålunda äro så höga, att de praktiskt taget äro oåtkomliga på empirisk väg.

Notis om ekv. $x^2 + ay^2 = z^2$.

Man kan på följande sätt finna heltalslösningar till denna ekv. (a helt tal).

Sätt $z = py - x$, där p är ett rationellt tal $\frac{t}{u}$ (t och u hela tal).

Då fås $x^2 + ay^2 = x^2 - 2pxy + p^2y^2$, $\because x = \dfrac{p^2 - a}{2p} \cdot y = \dfrac{t^2 - au^2}{2tu} \cdot y$.

Om $t^2 - au^2$ och $2tu$ ha en gemensam faktor $\alpha \geqq 1$, så kan man sätta $\alpha \cdot x = t^2 - au^2$, $\alpha y = 2tu$. Man finnner då $\alpha \cdot z = t^2 + au^2$.

Henrik Petrini.

Beräkning av tredjerötter enbart med hjälp av räknetabeller för realskolan.

I en anmälan av undertecknads skrivningsuppgifter för latingymnasiet i denna tidskrifts senaste nummer (mars 1936) säger lektor Elis Hjalmar, att ett sådant uttryck som $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ ej numera kan behärskas på latinlinjen. Just detta uttryck (radien i ett klot med en volym av en rymdenhet) finnes i många räknetabeller direkt angivet (se t. ex. i »Ernst Foghammar, Räknetabeller för realskolans avslutningsklass och det odifferentierade latingymnasiet» längst ned sid. 10). Det bereder dock ej någon större svårighet att med den tabell för tredjedigniteter och tredjerötter, som finnes för talen 2—100, göra beräkningen direkt. Av tabellen framgår:

n^3	n
238 328	62
250 047	63

Beräkningen blir:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{0{,}23873} = \sqrt[3]{\frac{238\,730}{1\,000\,000}} = \frac{1}{100} \cdot \left(62 + \frac{402}{11\,719}\right) = 0{,}6203.$$

Om man till sitt förfogande ej har en tabell, som angiver talens tredje digniteter utan blott deras tredjerötter, får man i detta fall vid uträkningen använda ett litet konstgrepp — man förlänger under rotmärket med talet 8.

Beräkningen blir då:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{0{,}23873} = \sqrt[3]{\frac{238{,}73 \,.\, 8}{1\,000 \,.\, 8}} = \sqrt[3]{\frac{29{,}841 \,.\, 8}{1\,000}} =$$

$$= \frac{2}{10}\left[\sqrt[3]{29} + \frac{841}{1\,000}\left(\sqrt[3]{30} - \sqrt[3]{29}\right)\right] = 0{,}6203.$$

Noggrannheten blir alltså lika god som då man använder logaritmer. De lärjungar, som redan lärt sig interpolering vid beräkning av kvadratrötter, kunna alltså efter någon övning även beräkna tredjerötter utan att ha någon kunskap om logaritmer.

Ernst Foghammar.

När kan summan av bråk förkortas?

Av ERIK FALCK.

Vid utskrivandet av räkneexempel rörande bråks addition har mången lärare säkert gjort sig den i rubriken ställda frågan, men förhända icke kommit att ägna densamma en mera ingående granskning. Efterföljande undersökning visar, att problemet utan större svårighet tillåter en skäligen fullständig teoretisk behandling, och kan måhända även vara till praktisk nytta vid exempelkomposition.

1. $\frac{x}{ad}$ och $\frac{y}{bd}$ må vara två oförkortbara, egentliga bråk; d betecknar nämnarnas största gemensamma faktor. Talen a och b ha följaktligen inga gemensamma faktorer, men kunna ha faktorer gemensamma med d. Vi bilda summan

$$\frac{x}{ad}+\frac{y}{bd}=\frac{x\,.\,b+y\,.\,a}{abd}. \tag{1}$$

Man inser, att *förkortning kan komma i fråga endast med sådana faktorer i d, som ingå varken i a eller i b,* eller på annat sätt uttryckt, *endast med sådana för bägge nämnarna gemensamma faktorer, som ingå lika många gånger i vardera nämnaren.*

Ex. 1. Summan $\frac{x}{15}+\frac{y}{18}=\frac{6x+5y}{90}$ är helt och hållet oförkortbar för alla tillåtna värdepar x, y.

Ex. 2. Summan $\frac{x}{42}+\frac{y}{105}=\frac{5x+2y}{210}$ kan icke göras förkortbar med 2 eller med 5, men däremot med 3 eller med 7 eller med 21, t. ex.

$$\frac{25}{42}+\frac{32}{105}=\frac{125+64}{210}=\frac{189^{(21)}}{210}=\frac{9}{10}.$$

2. Vi beteckna med r ett tal, varmed förkortning av summan (1) enligt 1. kan ifrågakomma. Fråga uppstår nu, om förkortningen alltid kan fås till stånd, d. v. s. om uppgiften att bestämma ett täljarpar x, y så, att summan (1) kan förkortas med r, alltid är möjlig. Av det följande skall framgå ett jakande svar på denna fråga, varjämte ett uttryck för antalet lösningar skall härledas.

Vi sätta $d = r\varrho\varrho'$, varvid ϱ betecknar produkten av de faktorer i $d : r$, som *jämväl* äro faktorer i r, medan ϱ' betecknar produkten av de faktorer i $d : r$, som *icke* äro faktorer i r. Sättes ännu $a\varrho' = p$ och $b\varrho' = q$, har man $ad = ar\varrho\varrho' = \varrho \,.\, pr$ och $bd = br\varrho\varrho' = \varrho \,.\, qr$.

Då r enligt 1. icke har några faktorer gemensamma med a eller b och enligt det ovanstående icke heller med ϱ', har r inga faktorer gemensamma med p eller q.

Förkortbarhetsvillkoret kan uttryckas genom kongruensen

$$x \,.\, b + y \,.\, a \equiv 0 \pmod{r},$$

vilken kan ersättas med sytemet

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{(I)} \;\; x \,.\, b \equiv \mu \pmod{r} & (\mu < r) \\ \text{(II)} \;\; y \,.\, a \equiv \nu \pmod{r} & (\nu < r) \\ \text{(III)} \;\; \mu + \nu = r. \end{cases}$$

För att finna lösningar till detta system, kan man för x efter behag välja ett tillåtet värde ($< \varrho \,.\, pr$ och relativt primtal till r och p). Kongruensen (I) bestämmer då μ. Det tillhörande värdet ν uttages enligt (III), varpå kongruensen (II) ger en följd av y-värden, av vilka dock blott de äro tillåtna, som äro $< \varrho \,.\, qr$ och relativa primtal till r och q.

Ex. 3. Vi välja i bråksumman $\frac{x}{42} + \frac{y}{105} = \frac{5x + 2y}{210}$ för x det tillåtna värdet 25 och vilja bestämma y så, att summan blir förkortbar med 21 (jmfr ex. 2). Man har då $5x = 125$, och då $125 \equiv 20 \pmod{21}$, bestämmes y av kongruensen $2y \equiv 1 \pmod{21}$ [$\mu = 20$; $\nu = 1$], vars rötter kunna skrivas i formen $y = 11 + n \cdot 21$. Mindre än 105 äro rötterna 11, 32, 53, 74, 95. Av dessa måste den sista såsom divisibel med 5 förkastas.

3. Det skall nu bevisas, att antalet tillåtna värdepar x, y, som satisfiera systemet (2), eller med andra ord antalet lösningar till den i början av 2. formulerade uppgiften, angives av uttrycket

$$N = \varrho^2 \cdot \varphi(p) \cdot \varphi(q) \cdot \varphi(r), \tag{3}$$

vari φ betecknar den kända talteoretiska funktionen $\varphi(n)$, vilken för ett givet helt tal n anger antalet hela tal (talet 1 inberäknat), som äro $< n$ och relativa primtal till n, och för vilken gäller

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{n_1}\right)\left(1 - \frac{1}{n_2}\right)\left(1 - \frac{1}{n_3}\right)\ldots, \tag{4}$$

om n_1, n_2, n_3 .... beteckna de primfaktorer, vilka eventuellt upphöjda i vissa potenser, ingå i n.[1]

Till att börja med inses, att μ och ν måste vara relativa primtal till r. Ty sättes exempelvis $x \cdot b - \mu = hr$, har man $x \cdot b = hr + \mu$. Hade nu μ en faktor gemensam med r, skulle även x eller b hava det, vilket icke är fallet.

För μ och ν komma alltså i fråga heltaltalsvärden, som äro $< r$ och relativa primtal till r. Antalet sådana tal uttryckes genom funktionen $\varphi(r)$. Det till ett tillåtet värde μ av likheten (III) bestämda värdet ν är likaså tillåtet. Ty om ν hade någon faktor gemensam med r, skulle även $\mu = r - \nu$ hava det.

Vi välja nu i kongruensen (I) för μ ett tillåtet värde μ_k (d. v. s. $< r$ och relativt primtal till r). Enligt talteorien har kongruensen en rot $x_0 < r$ och ϱp rötter $< \varrho pr$, vilka kunna skrivas i formen

$$x = x_0 + n \cdot r \qquad (0 \leqq n < \varrho p). \tag{5}$$

Användbara värden x äro de tal i följden (5), som äro relativa primtal till både r och p. Man inser lätt, att x_0 och

[1] Efterföljande bevis för formeln (3), vilket är betydligt kortare än det av mig ursprungligen utförda, har till sina väsentligaste delar lämnats mig av lektor B. Hedström, Helsingfors.

därmed samtliga tal i följden äro relativa primtal till r. Av de ϱp rötterna måste därför endast de uteslutas, vilka ha någon faktor gemensam med p.

Vi antaga först, att $0 \leqq n < p$ och betrakta de rester som fås, då talen i följden (5) divideras med p. Mot två olika värden n, vi beteckna dem n_1 och n_2 $(n_1 > n_2)$, kan icke svara samma rest, ty då vore skillnaden $(x_0 + n_1 r) - (x_0 + n_2 r) = r(n_1 - n_2)$ delbar med p, vilket är omöjligt, då r och p äro relativa primtal och $n_1 - n_2 < p$. Då vidare antalet tal i följden (5) är $= p$, så länge $0 \leqq n < p$, måste resterna antaga alla heltaliga värden $< p$, jämte värdet 0. Antalet rester, som äro relativa primtal till p, anges således av funktionen $\varphi(p)$. Med stöd av den mellan dividend, divisor, kvot och rest gällande relationen inses emellertid lätt, att om en av resterna är relativt primtal till p, detsamma gäller om motsvarande tal i följden (5).

Alltså anger funktionen $\varphi(p)$ även antalet tal i följden (5), vilka äro relativa primtal till p, om $0 \leqq n < p$. Fortsättes följden (5) så, att $p \leqq n < 2p$, så komma vid division med p de rester, som erhållits för $n < p$, att upprepas i samma ordning som förut, likaså då $2p \leqq n < 3p$ o. s. v. Alltså har man, då $0 \leqq n < \varrho p$, för antalet i följden (5) ingående tal, vilka äro relativa primtal till p, uttrycket $\varrho \cdot \varphi(p)$.

För ett visst tillåtet värde μ_k ger alltså kongruensen (I) $\varrho \cdot \varphi(p)$ användbara värden x. Mot μ_k svarar, som tidigare framhållits, ett tillåtet värde ν_k enligt (III). På samma sätt som ovan inses, att kongruensen (II) till detta värde ν_k bestämmer $\varrho \cdot \varphi(q)$ användbara värden y. Således motsvaras varje tillåtet värdepar μ, ν av $\varrho \cdot \varphi(p) \cdot \varrho \cdot \varphi(q) = \varrho^2 \cdot \varphi(p) \cdot \varphi(q)$ användbara värdepar x, y. Då antalet tillåtna värdepar μ, ν är $\varphi(r)$, följer riktigheten av formeln (3).

För det fall, att p, q och r äro primtal, förenklas formlerna för $\varphi(p)$, $\varphi(q)$ och $\varphi(r)$ till uttrycken $p - 1$, $q - 1$ och $r - 1$. Särskilt bör observeras, att $\varphi(1) = 1$.

Till ett visst tillåtet värde x svara $\varrho \,.\, q(q)$ värden y, och till ett visst tillåtet värde y svara $\varrho \,.\, \varphi(p)$ värden x.

Ex. 4. Önskas den i ex. 3 betraktade bråksumman förkortbar med 21, sättes $r(=d)=21$, $p(=a)=2$, $q(=b)=5$, $\varrho=1$. Man har då $\varphi(p)=1$, $\varphi(q)=4$, $\varphi(r)=12$ och $N=4\cdot 12=48$. Till ett givet värde x svara $\varrho \cdot \varphi(q)=4$ värden y.

Nöjer man sig med att förkorta med 3, sättes $r=3$, $\varrho'=7$, $p=14$, $q=35$, varefter formeln (3) ger $N=6\cdot 24\cdot 2=288$.

4. Den i 1. givna regeln gäller utan ändring även bråks *subtraktion*, och den i 2. och 3. utförda undersökningen kan med lindrig modifikation tillämpas även på detta räknesätt. Man har blott att i systemet (2) förändra likheten (III) till $\mu=\nu$. Om även negativa differenser godkännas, förändras därigenom icke uttrycket för antalet lösningar.

5. Problemets praktiska tillämpning vid exempelkomposition må demonstreras med ett par exempel.

a) Vi utskriva på måfå en summa av bråk, t. ex. $\frac{4}{25}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$, och erhålla efter addition $1\frac{173}{300}$. Vi önska komplettera summan med ännu en addend så, att vi utan ökning av nämnarnas minsta gemensamma dividend erhålla ett förkortbart svar. Den nya addendens nämnare bör då vara en faktor i 300; vi välja exempelvis 75 och skriva $\frac{173}{300}+\frac{y}{75}=\frac{173+4y}{300}$. Man har då $d=75$, $a=4$, $b=1$. Önska vi förkortning med 75, är $\varrho=\varrho'=1$, $p=4$, $q=1$. Då $\varphi(q)=1$, finnes det blott ett värde y, som kan möjliggöra denna förkortning. Då $173\equiv 23 \pmod{75}$, bör man hava $4y\equiv 52 \pmod{75}$. Sistnämnda kongruens har roten $y=13$, och i själva verket är $\frac{173}{300}+\frac{13}{75}=\frac{225}{300}=\frac{3}{4}$.

Nöjer man sig med att förkorta med 3, sättes $r=3$, $\varrho=1$, $\varrho'=25$, $p=100$, $q=25$. Man har nu $\varphi(q)=20$ och bör alltså kunna välja mellan 20 värden y. För att finna dem

beakta vi, att $173 \equiv 2 \pmod 3$. Man bör alltså ha $4y \equiv 1 \pmod 3$, varav $y = 1 + n \cdot 3$. Detta ger 25 värden $y < 75$, av vilka emellertid de måste uteslutas, som äro divisibla med 3 eller 5. Divisibelt med 3 kan intet av dem vara. Divisibla med 5 äro värdena 10, 15, 40, 55 och 70. De återstående 20 värdena 1, 4, 7, 13, 16, 19, 22, 28, 31, 34, 37, 43, 46, 49, 52, 58, 61, 64, 67, 73 äro användbara.

Teorien ger vidare vid handen, att om vi valt 60 till nämnare för den kompletterande addenden, så hade summan icke kunnat göras förkortbar med något större tal än 12, vilket skulle inträffa för 4 värden y, nämligen 11, 23, 47 och 59. — Med 10 som nämnare för den kompletterande addenden skulle summan icke alls kunna göras förkortbar.

b) Vi önska bestämma x så, att skillnaden $\frac{x}{1257} - \frac{1725}{2933}$ kan förkortas med 419. Då $1257 = 3 \cdot 419$ och $2933 = 7 \cdot 419$, är $r = 419$, $p = 3$, $q = 7$, $\varphi(p) = 2$. De sökta värdena x äro alltså till antalet 2. Då skillnaden göres liknämnig, är dess täljare $7x - 5175$. Man har $5175 \equiv 147 \pmod{419}$ och sätter därför $7x \equiv 147 \pmod{419}$, varav $x = 21 + n \cdot 419$.

Av de tre tal i denna följd, som äro < 1257, måste det första såsom divisibelt med 3 uteslutas. De sökta värdena x bliva 440 och 859. Skall det förra av dem leda till positiv differens, måste minuenden kompletteras med en heltalig beståndsdel. I själva verket har man

$$1\,\frac{440}{1257} - \frac{1725}{2933} = \frac{11879 - 5175}{8799} = \frac{6704^{(419)}}{8799} = \frac{16}{21}$$

och

$$\frac{859}{1257} - \frac{1725}{2933} = \frac{6013 - 5175}{8799} = \frac{838^{(419)}}{8799} = \frac{2}{21}.$$

Ljustekniska definitioner och enheter samt mätmetoder inom fotometrien.

Av GUNNAR NILSSON.

Följande framställning avser i huvudsak de begrepp och metoder, som ha betydelse i nutida ljusteknik, och berör således ej det som faller under den rena optiken, kolorimetrien och andra områden, som snarare tillhöra fysiken.

Vidare får förutskickas, att svenska normer på detta område ännu ej fastställts. Det har därför blivit praxis att följa de regler, som uppställts av International Commission on Illumination (ICI) samt de tyska DIN-normerna (Deutsche Industrie-Normen), vilka i stort sett överensstämma med de förstnämnda.

De fotometriska grundbegreppen och deras samband.

Innebörden av de fotometriska begreppen och deras matematiska samband framgår enklast, om man — på ett relativt stort avstånd — betraktar strålningen från ett litet, fullkomligt diffust strålande plant ytelement df.

Strålningen $d\Phi$ inom ett visst litet rymdvinkelelement $d\omega$ (se fig. 1) kring en riktning, som bildar vinkeln ε med normalen till ytelementet, är enligt Lamberts experimentellt verifierade consinuslag propor-

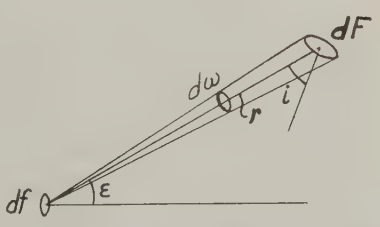


Fig 1. Till fotometriska grundlagen.

tionell mot cos ε och mot strålningen per tidsenhet. Man har därför

$$d\Phi = B \,.\, df \,.\, d\omega \,.\, \cos \varepsilon, \tag{1}$$

där B är en konstant. Träffar strålningen $d\Phi$ en liten yta dF på det relativt stora avståndet r från df och bildar strålningsriktningen ($df \rightarrow dF$) vinkeln i med dF:s normal, så är $d\omega = \frac{dF \,.\, \cos i}{r^2}$ och således

$$d\Phi = \frac{B \,.\, df \,.\, dF \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \cos i}{r^2}, \tag{2}$$

vilket uttryck kan betraktas som den *fotometriska grundlagen*. Den totala strålningen från en diffust strålande, plan yta f erhålles genom integration av (1):

$$\Phi = \pi \,.\, B \,.\, f. \tag{3}$$

Inom fotometrien intresserar endast den synliga delen av strålningen, och de olika färgerna göra sig fotometriskt gällande i proportion till sin inverkan på det mänskliga ögat. För *ögats relativa känslighet* (V_λ) för lika strålningseffekt av olika våglängd λ har ICI antagit de i tabell 1 återgivna värdena, där den maximala känsligheten för gult ljus av våglängden 5 550 Å är satt till 1. Tabellen är uppgjord på grundval av försök med ett stort antal personer, vilka före försöken vistats i ett ljust rum. Tabellvärdena hänföra sig sålunda till ett »ljusadapterat öga».

Detta betyder en sådan inställning hos ögat, att av dess ljuskänsliga organ, stavar och tappar, endast de senare äro i verksamhet. Tabellens värden motsvaras av kurvan b i fig. 2 (»tappkurvan»). För mörkeradapterat öga gäller »stavkurvan» a. Som synes är känslighetsmaximum i detta fall förskjutet mot kortare våglängd, c:a 5 090 Å. Då stavarna träda i verksamhet först vid ljustätheter under $2{,}5 \,.\, 10^{-4}$ HK/cm^2, motsvarande en belysningsstyrka av storleksordningen 10 lux (om dessa enheter se nedan), är tappkurvan utslagsgivande i praktiken. Vid fotometrering söker man därför hålla sig över detta värde.

Tabell 1.

Relativa känsligheten hos ett ljusadapterat öga för ljus av olika våglängder, hänförd till maximalvärdet (enl. den av ICI fastställda känslighetskurvan).

λ i Å	$V\lambda$	λ i Å	$V\lambda$
4000	0,0004	6000	0,631
4100	0,0012	6100	0,503
4200	0,0040	6200	0,381
4300	0,0116	6300	0,265
4400	0,023	6400	0,175
4500	0,038	6500	0,107
4600	0,060	6600	0,061
4700	0,091	6700	0,032
4800	0,139	6800	0,017
4900	0,208	6900	0,0082
5000	0,323	7000	0,0041
5100	0,503	7100	0,0021
5200	0,710	7200	0,00105
5300	0,862	7300	0,00052
5400	0,954	7400	0,00025
5500	0,995	7500	0,00012
5550	1,000	7600	0,00006
5600	0,995		
5700	0,952		
5800	0,870		
5900	0,757		

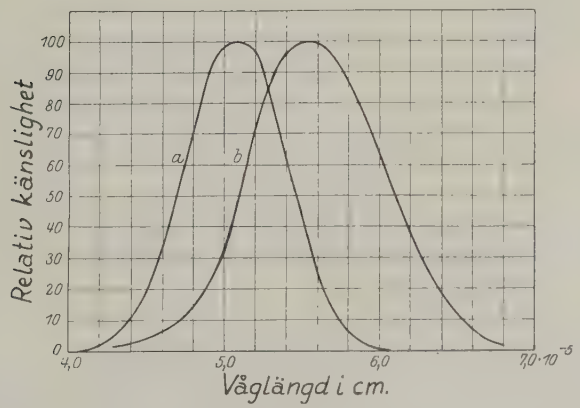


Fig. 2. Ögats känslighetskurvor. Relativ känslighet i %.
a. För stavarna. b. För tapparna.

Den på ögat inverkande strålningen kallas inom fotometrien ljusflöde och definieras sålunda.

Ljusflöde (Φ eller F) — tidigare benämnt ljusström — är den per tidsenhet av en ljuskälla utsända eller i ett ljusknippe fortplantade ljusenergien, avvägd efter ovanstående internationellt fastställda känslighetstabell (tab. 1).

Ljusflödet är således den ljuseffekt, vilken i praktiken uppmätes subjektivt med ögat eller med objektiva instrument (t. ex. korrigerad fotocell), som ha samma känslighetskurva som ögat.

Ljusmängd (Q) är produkten av ljusflödet och den tid, under vilken det utsändes.

Ljusstyrkan (I eller J) i viss riktning är

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}, \tag{4}$$

där $d\Phi$ är ljusflödet inom en liten rymdvinkel $d\omega$. Definitionen gäller endast, om ljuskällan kan betraktas som liten, punktformig i förhållande till mätavståndet. Detta är fallet, om en på detta avstånd uppmätt ljusstyrka icke avviker mera från en på större avstånd uppmätt ljusstyrka, än vad som motsvarar ordinära mätfel.

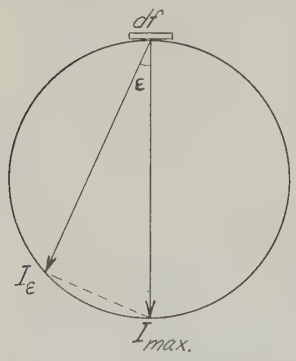


Fig. 3. Lamberts cosinuslag: $I_\varepsilon = I_{max.} \cdot \cos \varepsilon$.

För en diffust strålande plan yta är ljusstyrkan I_ε i en riktning, som bildar vinkeln ε med ytans normal, enligt (1) och (4)

$$I_\varepsilon = B \,.\, f \,.\, \cos \varepsilon, \tag{5}$$

och dess maximala värde, för $\varepsilon = 0$, är $I_{max} = B \,.\, f$. Sambandet mellan I_ε och I_{max} åskådliggöres av fig. 3.

Belysningsstyrkan definieras som

$$E = \frac{d\Phi}{dF}, \tag{6}$$

där dF är den yta, på vilken $d\Phi$ infaller. Belysningsstyrkan är således det inkommande flödets yttäthet.

För en yta F, som belyses vinkelrätt från en punktformig ljuskälla på avståndet r, blir

$$\omega = \frac{F}{r^2} \tag{7}$$

och enligt (2), (4) och (6)

$$E = \frac{I}{r^2}. \tag{8}$$

Ljustäthet (e eller B) är specifik ljusstyrka och definieras för en lysande yta f i en riktning, som bildar vinkeln ε med ytans normal, som

$$e = \frac{I_\varepsilon}{f \cdot \cos \varepsilon}. \tag{9}$$

Detta gäller såväl för självlysande som sekundärt lysande ytor.

För en diffust strålande plan yta blir enligt (5) $e = B$ och således konstant, varför den senare beteckningen brukar användas för diffust strålande ytor.

Specifikt ljusflöde

$$R = \frac{\Phi}{f} \tag{10}$$

är det från ytan f totalt utsända flödets yttäthet.

Ljusutbyte är kvoten mellan avgivet ljusflöde och tillförd effekt.

Enheter.

Enheten för Φ är lumen (lm). Häremot svarar enligt formlerna härovan I mätt i normalljus och E mätt i lux

(lx) under förutsättning att avstånden mätas i meter, ytan i m^2. Sambanden belysas av fig 4.[1]

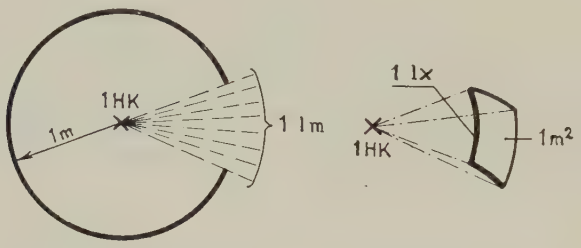


Fig. 4. Schematisk framställning av sambandet mellan ljustyrka, ljusflöde och belysningsstyrka.

Ehuru ljusflödet med hänsyn till det praktiska värdet får betraktas som det grundläggande begreppet, äro enheterna empiriskt bestämda med utgångspunkt från ljusstyrkan i viss (horisontell) riktning hos en normal.

Från början ha olika normaler använts i olika länder. Tyvärr fasthåller man ännu på olika håll vid två olika sådana. Vi äro därför fortfarande nödsakade att röra oss med två serier enheter, nämligen de som hänföra sig till hefnerljuset (HK) resp. det s. k. internationella normalljuset (koltrådslampa), vanligen betecknat ICP (International Candle Power). Den senare är något större, och år 1909 fastställdes relationstalet till 10/9. Detta gäller fortfarande så länge det är fråga om koltrådslampor, men saken har ytterligare komplicerats genom tillkomsten av de lufttomma och gasfyllda metalltrådslamporna, som ge ljus av annan färg. Genom brister i mätmetoderna vid heterokrom fotometri har man kommit till andra resultat vid inbördes jämförelse mellan nyare lampor, som kalibrerats mot de olika normalerna.

[1] Utan samband med det föregående kunna enheterna elementärt definieras på följande sätt, under hänvisning till fig. 4: En *lumen* är det ljusflöde, som erhålles inom rymdvinkelenheten från en ljuskälla, som i alla riktningar har en ljusstyrka av 1 normalljus. En *lux* är den belysningsstyrka, som ett ljusflöde av 1 lumen alstrar på en yta av 1 m^2.

I brist på bättre få vi därför t. v. räkna med faktorn 1,11 för koltråds-, 1,11 för lufttomma och 1,17 för gasfyllda metalltrådslampor vid övergång från ICP till HK.

Tillkomsten på senare tid av nya ljuskällor av mera monokromatisk typ, såsom natrium- och kvicksilverlampor, ha gjort hela denna fråga högaktuell, och det arbetas f. n. febrilt på att åvägabringa en bättre tingens ordning i berörda avseende. Vid senaste ICI-kongressen — i Berlin 1935 — enades man således om att till utgångspunkt välja svarta kroppens strålning vid en temperatur = platinas smältpunkt. Det återstår dock att framställa en praktiskt användbar normal.

De anglosachsiska ländernas måttsystem i övrigt göra inte saken bättre. Dessa räkna således ofta i foot-candles (f.c.) i stället för lux. 1 f.c. = 11,95 hefnerlux.

För att markera, till vilken normal en enhet hänför sig, sätter man ett H resp. I framför beteckningen, t. ex. Hlm, Ilm.

För ljustäthet få vi HK/cm^2, även benämnd stilb (sb), och $\frac{\text{ICP}}{\text{cm}^2}$ eller $\frac{\text{ICP}}{\text{fot}^2}$.

Specifikt ljusflöde uttryckes i $\frac{\text{lm}}{\text{cm}^2}$, (lumen per cm^2), av amerikanarna kallad lambert (då räknas med Ilm); tyskarna använda även $\frac{\text{Hlm}}{\text{m}^2}$, som benämnes apostilb (asb).

Medelljusstyrkor. Som entydigt mått på en lampa är totala ljusflödet det enda riktiga. Man har också på sista tiden börjat att jämte wattalet stämpla normala glödlampor i *dekalumen* (Dlm = 10 Ilm). Tidigare angavs emellertid i stället ljusstyrkan på ett eller annat sätt. För koltråds- och äldre lufttomma lamptyper angavs således horisontella medelljusstyrkan (I_h). Av denna kan man få ett närmevärde på lumentalet genom multiplikation med 10, ty I_h är vid ifrågavarande lystrådssystem nära $= \frac{I_\bigcirc}{0{,}8}$, om $I_\bigcirc$ är sfäriska

medelljusstyrkan, och $\Phi = 4\,\pi\,I_{\bigcirc}$, eftersom hela rymdvinkeln $= 4\,\pi$. Således

$$\Phi = 4\pi 0{,}8\,I_h \simeq 10\,I_h. \qquad (11)$$

För gasfyllda lampor med ringformad lystråd kan man inte med god säkerhet mäta I_h. Skall någon ljusstyrka angivas, blir det därför $I_{\bigcirc}$, varav man enl. föreg. får $\Phi = 4\,\pi\,I_{\bigcirc}$. Detta bör observeras vid jämförelse mellan nyare och äldre lamptyper.

Ovan har ljusflödet betecknats som det grundläggande begreppet såsom varande ett entydigt mått på ljuskvantiteten. Vid all värdesättning av *belysning,* ävensom inom fotometrien, är det emellertid *ljustätheten,* som är det väsentliga, detta emedan det alltid är ljustätheten hos belysta ytor vi med ögat uppfatta och jämföra. Ljustätheten, och kontrasten mellan olika ljustätheter, är således bestämmande för

Tabell 2.

Tablå över ljustekniska enheter och deras samband med varandra.

Storhet	Beteckning och samband	Enhet	Beteckning
Ljusflöde	Φ	lumen	lm
Ljusmängd	$Q = \Phi \cdot t$	lumentimme	lmh
Ljusstyrka	$I = \frac{\Phi}{\omega}$	normalljus (hefner eller int.)	HK eller ICP
Belysningsstyrka	$E = \frac{\Phi}{F}$	lux	lx
Ljustäthet	$e = \frac{I_\varepsilon}{f \cdot \cos \varepsilon}$	stilb.	sb
Spec. ljusflöde	$R = \frac{\Phi}{f}$	lumen pr cm²	lm/cm²

Här betyder:

F yta i m²
f yta i cm²
t tid i timmar
ε emissionsvinkel
ω rymdvinkel

synskärpa och synhastighet. Vidare grundar sig den subjektiva fotometrien helt och hållet på jämförelse av ljustätheter.

Bländningsföreteelsen, som är en av de värsta stötestenarna inom belysningstekniken, är helt och hållet beroende av ljustäthetsförhållandena.

Begreppen reflexions- (ϱ), transmissions- (τ) och absorptionsförmåga (α) äro väl så bekanta att de ej behöva definieras här. $\varrho + \tau + \alpha = 1$. Jämte dessa begagnas för *kvalitativ* karakteristik av ett material *diffusionsförmågan*

$$\delta = \frac{\Phi}{\pi I_{\max}}. \qquad (12)$$

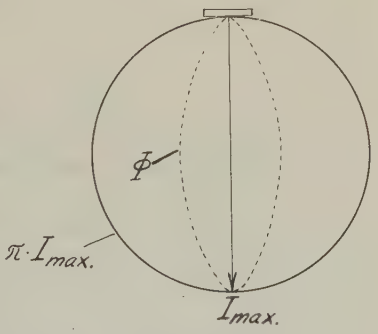


Fig. 5. Diffusionsförmågans definition. Den streckade kurvan representerar det verkliga flödet, cirkeln det som skulle erhållas vid samma $I_{\max}$ och fullkomlig diffusitet.

En fullt diffus yta utsänder ljusflödet $\Phi = \pi I_{\max}$, vilket man finner genom en enkel integration För en sådan är således $\delta = 1$, eljest < 1.

Ljusfördelningskurvan, d. v. s. polardiagrammet över ljusstyrkan i olika riktningar från en plan, diffust lysande yta, är således en cirkel. (Fig. 5.)

Fotometri.

Som förut nämnts, grundar sig all subjektiv fotometri, d. v. s ljusmätning med ögats hjälp, på jämförelse av ljustätheter. Ögat är som bekant tämligen oförmöget att bedöma en ljustäthets absoluta värde, men man kan med någorlunda säkerhet bedöma, när två närbelägna ytors ljustätheter äro lika. Principkonstruktionen för en fotometer framgår av fig. 6.

Oftast har man de båda observationsytorna exakt lika. I så fall kan man säga, att det är belysningsstyrkorna på dessa som jämföras.

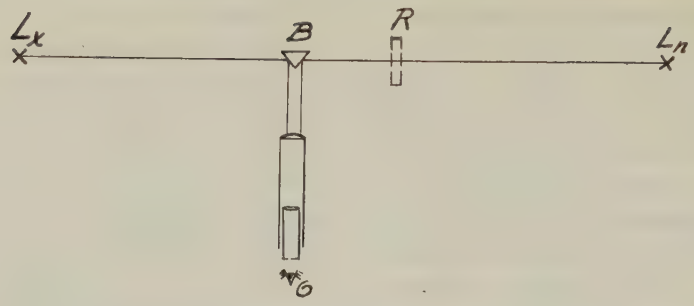


Fig. 6. Grundprincipen för subjektiv fotometri: L_n och L_x ljuskällor; R regleringsorgan; B jämförelseapparaten; O ögat.

För de allra flesta slag av mätningar kan man ju använda olika apparater eller apparatkombinationer. Så även här. En kort översikt över fotometerapparatur kan därför lämpligen indelas i två grupper organ, som kunna användas i en mångfald kombinationer, nämligen *regleringsorgan* och *jämförelseapparater*. Ordningsföljden mellan dessa har valts på detta sätt med hänsyn till att man först och främst måste laga att ljustätheterna bli lika. När detta är fallet, avgöres med hjälp av en jämförelseapparat.

Avståndsreglering torde väl vara den enklaste metoden vid jämförelse av två ljuskällor i fotometerbänk. Vi betrakta fig. 6 och förutsätta L_n:s ljusstyrka känd. Reglerar man till likhet genom förflyttning av endera L_n, L_x eller B, erhålles L_x:s ljusstyrka enligt avståndskvadratlagen (8).

Vid diffus strålning kan regleringen också ske genom ändring av emissionsvinkeln ε ($I_\varepsilon = B \,.\, f \,.\, \cos \varepsilon$).

Bländarreglering kan företagas på två sätt. Vid konstant ljustäthet avskärmas en större eller mindre del av den lysande ytan (detta förutsätter dock diffus strålning, åtminstone för små vinklar). Ett annat sätt är att använda bländare i linssystem för reduktion av ljusstyrkan hos den reella bilden av ljuskällan.

Absorptionsfilter kunna insättas i det ena strålknippets väg. Härvid får dock ej ljusets färg förändras, d. v. s.

filtren måste vara absolut grå. Reglering möjliggöres genom två inbördes förskjutbara filterplattor (fig. 7). Absorptionen är då prop. mot sammanlagda tjockleken.

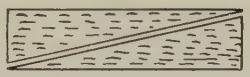


Fig. 7. Absorptionsfilter med variabel tjocklek.

Roterande sektorskiva.

En fördelaktig metod, som grundar sig på Talbots sats, vilken säger:

»Om en del av näthinnan träffas av periodiskt föränderligt och regelbundet med samma styrka återkommande ljus, så uppstår, om perioden är tillräckligt kort, ett kontinuerligt intryck, som är lika med det som skulle uppstå, om det ljus, som träffar näthinnan under varje period, vore likformigt fördelat över hela perioden.»

Insättes således en roterande sektorskiva i ljusknippets väg, så blir ljusstyrkan skenbart försvagad i omvänd proportion mot sektoröppningarnas storlek och antal. Om verkliga ljusflödet är Φ och sektoröppningarna n st., vardera med öppningen α^0, så blir det »reducerade ljusflödet» $= \frac{n \cdot \alpha}{360} \cdot \Phi$.

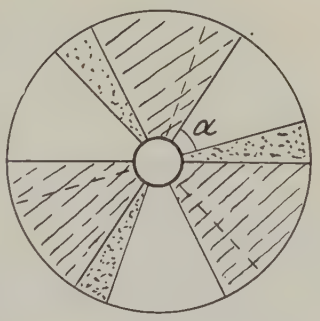


Fig. 8. Roterande sektorskiva med reglerbar sektoröppning.

Rotationshastigheten måste vara så hög, att ljusintrycket blir konstant. 40 p/s kan sägas vara nedre gräns vid ordinär belysningsstyrka. Ännu bättre är att ha sektorskivan fast och ljusknippet roterande, emedan sektoröppningen då lättare kan varieras under gång.

Vid denna metod är ändring i ljusets sammansättning utesluten och försvagningen kan noga fastställas.

Nicolprismor användas stundom för reglering, men denna

metod ger ingen större noggrannhet. För praktiska mätinstrument har den emellertid den fördelen att reglering kan ske kontinuerligt från full ljusstyrka ned till 0.

Med förbigående av Ritchies kil och Bunsens fettfläck såsom varande tämligen osäkra, ha vi två mycket använda *jämförelseapparater,* nämligen Lummer-Brodhuns biprisma och flimmerfotometern. Med det förra kunna två mot varandra vinkelräta ljusknippen sammanföras så, som fig. 9 visar. Bäst är att använda kontrastbedömning, d. v. s. den ena ljusstyrkan försvagas några procent med ett par små gråfilter. Vid nyare fotometerkonstruktioner äro dessa filter anbragta så, att de lätt kunna slås ifrån. Man kan således efter behag använda likhets- eller kontrastbedömning.

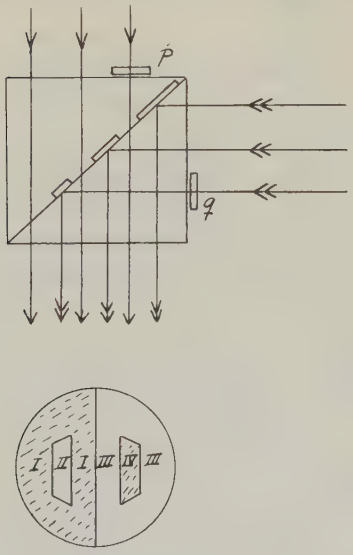


Fig. 9. Lummer-Brodhuns biprisma. *p* och *q* gråfilter. II och IV skola vara inbördes lika ljusa och mörkare än I och III, som också skola vara lika inbördes. Borttages *p* och *q* skall hela cirkelytan synas lika ljus.

I förra fallet sker inställningen så, att hela synfältet synes jämnt belyst, d. v. s. de två trapetsen försvinna. Detta förutsätter emellertid att båda ljuskällorna ha samma färg, eljest synas de båda trapetsen även vid lika belysningsstyrka på grund av färgkontrasten. Det är i synnerhet för sådana fall som kontrastbedömningen är fördelaktig. Man har då två små gråfilter i vägen för de ljusknippen, som alstra belysningen i trapetsfälten, vilken därför blir 3,5 % svagare än belysningen från samma ljuskälla i omgivande fältet på andra sidan. Man kan då reglera så, att lika kontrast erhålles mellan varje trapets och dess närmaste omgivning, d. v. s.

så att båda trapetsen synas lika mörka och båda de omgivande ytorna samtidigt lika ljusa.

Av flimmerfotometrar användes mest Bechsteins typ, vars konstruktion framgår av fig. 10. Synfältet utgöres av en central cirkelyta omgiven av en ringformad yta. Vid det optiska systemets rotation ser man under ett halvt varv i synfältets centrala del högra sidan av den belysta skärmen S och i den omgivande ringen b den vänstra sidan av S. Under påföljande halva varv är det omvänt — man ser vänstra sidan av S i mitten och den högra i periferien.

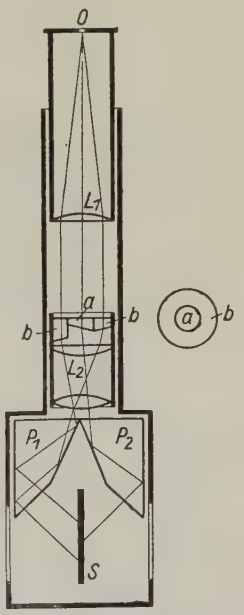


Fig. 10. Flimmerfotometer enl. Bechstein med roterande optiskt system, bestående av linser och prismor.

I princip innebär konstruktionen en tillämpning av Talbots sats, fastän sektorskivans mörkperiod ersatts med en ljusperiod från den andra ljuskällan. Vid lagom stor hastighet uppfattar ögat skillnad i ljustäthet men ej i färg. Flimmerfotometern användes därför ofta för jämförelse av *olikfärgade* ljuskällor.

Vid mycket stora färgskillnader får man övergå till användning av noga bestämda färgfilter.

Betr. mätning av färgat ljus hänvisas f. ö. till en artikel av G. Hassel i Tidskrift för Ljuskultur N:r 1, 1936.

Vid all fotometering bör man om möjligt arbeta med en ljustäthet av 25—30 asb, emedan ögat är känsligast för skillnader vid denna storleksordning.

Hjälpapparater.

För bekväm upptagning av ljusfördelningskurvor användes *spegelapparat* (fig. 11). Den är försedd med gradskala,

så att man kan ställa in för olika vinklar och mäta utan att rubba armatur eller instrument.

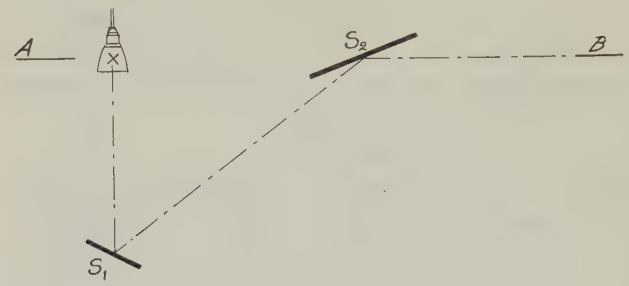


Fig. 11. Spegelapparat för upptagning av ljusfördelningskurvor. Speglarna S_1 och S_2 bilda ett stelt system, vridbart kring axeln $A—B$, som går genom lampcentrum. Fotometern uppställes vid B.

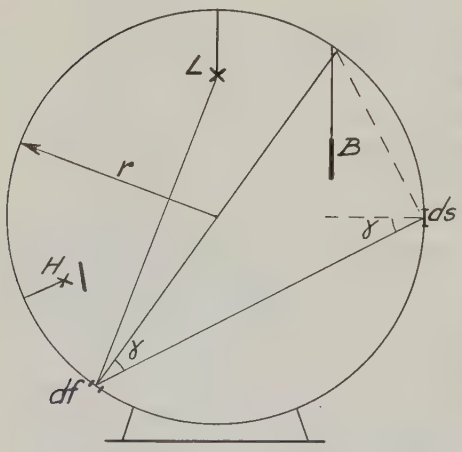


Fig. 12. Principen för Ulbrichts klot L är ljuskällan, B en skärm, H hjälplampa med tillhörande skärm; ds är ljusuttag.

Integratorer för direkt mätning av ljusflöde finnas av många olika slag. Mest användes Ulbrichts klot (fig. 12). Förutsatt att klotets diameter är stor i förhållande till ljuskällans (minst 5:1) och inre ytan matt, således nära fullständigt diffuserande, blir belysningen på mätöppningen (det direkta ljuset avskärmat) prop. mot totala ljusflödet. Detta kan lätt visas teoretiskt:

Belysningen på df blir $E = \frac{d\Phi}{df}$. Ljustätheten är e sb; df utsänder efter reflexion $\pi \cdot e \cdot df$ lm.

På ds infaller därav $ds \,.\, df \,.\, e \,.\, \frac{\cos^2 \gamma}{a^2}$, om a är avståndet (i meter) mellan df och ds.

Men $\cos \gamma = \frac{a}{2r}$; ds erhåller således $\frac{ds \,.\, df \,.\, e}{4r^2}$ lm. Häri ingår alltså ej a. Varje element df belyser således ds i samma grad.

Om reflexionsfaktorn är ϱ, erhåller ds totalt $\frac{ds \,.\, \varrho \,.\, \Phi}{4r^2\pi}$ lm efter en reflexion mot klotytan. Efter n reflexioner har ds träffats av

$$\Phi_{ds} = \frac{ds \,.\, \Phi \,.\, \varrho}{4\pi r^2(1 - \varrho)} \text{ lm.} \qquad (13)$$

Således blir belysningsstyrkan

$$E_s = \text{konst. } \Phi; \quad E_s \text{ mätes med lämplig fotometer.} \qquad (14)$$

Placeringen av ljuskällan är teoretiskt godtycklig, men i praktiken spelar den en viss roll, liksom skärmens placering. Ljuskällan bör befinna sig nära klotmitten, skärmen på avståndet 0,6—0,7 r från ljuskällan.

Vid mätningar på armatur med stor och mörk överyta (industriarmatur) erhålles ett rätt stort fel. Därför bör en hjälpmätning enligt Helwig utföras med hjälplampan H. Man mäter med

H ensam i klotet	E_H;
H tänd och L släckt	E_{HL};
H släckt och L tänd	E_L.

Korrektionsfaktorn blir tydligen $\frac{E_H}{E_{HL}}$, och det rätta värdet på

$$\Phi_L = E_L \,.\, \frac{E_H}{E_{HL}}. \qquad (15)$$

Se vidare B. Nordin: »Om felkällor vid ljusmätning med Ulbrichts klot», Tidskrift för Ljuskultur, N:r 4, 1935.

Objektiv ljusmätning.

Sedan fotocellerna under senare år utvecklats mycket snabbt, har man alltmera börjat övergå till ljusmätning utan direkt hjälp av ögat. Det är framför allt de s. k. spärrskiktcellerna, vilka väl rättare böra benämnas *fotoelement,* som tagits i bruk. De ha ju den fördelen att vara ytterligt enkla och lätthanterliga. På grund av att man vid belysning av ett fotoelement erhåller en tillräcklig ström utan tillsatsspänningar eller förstärkare, är allt som behövs en galvanometer eller mikroamperemeter. Medan man vid subjektiv fotometri måste göra ett flertal avläsningar för varje värde, räcker det här med *en.* Tidsbesparingen blir således betydande.

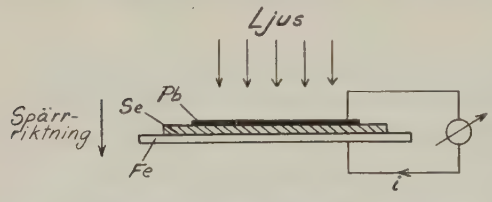


Fig. 13. Fotoelementets princip. Järnplattan är svetsad vid selenmetallen. Den andra elektroden består av en sprutad, ytterst tunn hinna av en blylegering.

Därför ha fotoelementen fått stor användning vid seriemätningar, t. ex. för fabrikationskontroll. De lida emellertid även av en del svagheter, som göra, att de lämpa sig mindre väl för noggrannare mätningar under olikartade betingelser. Således är känslighetskurvan mera sällan exakt lik ögats, varför man ej med gott resultat kan jämföra två olikfärgade ljuskällor. Tillsatskombinationer finnas dock för avhjälpande av detta fel, men en svårighet är att en dylik måste vara avpassad för ett visst bestämt element, då det är svårt att få två exakt lika. Vidare tröttas ett fotoelement något vid långvarig belysning, så att känsligheten avtar.

Fotoelementets verkningssätt kan knappast sägas vara helt klarlagt. Liksom i en strömriktare (likriktare) släppes strömmen endast fram i en riktning, som är motsatt den s. k. spärriktningen (härav den ofta använda benämningen spärrskiktcell).

Mest användes nog det element, vars konstruktion framgår av fig. 13. Det består av två hopsvetsade plattor, den ena av järn, den andra av selen, vilken senare genom ett speciellt förfarande givits mycket hög ledningsförmåga. På selenskivans andra sida är en ytterst tunn blylegering fastsprutad. Denna bildar den andra elektroden. Som bekant ger selen vid belysning en elektromotorisk kraft. Slutes nu en yttre krets genom en galvanometer, erhålles en *fotoström* med riktningen Fe-Se-Pb.

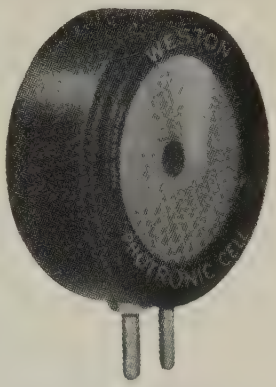


Fig. 14. Fotoelement av spärrskikttyp, något förminskat.

Känsligheten hos ett sådant fotoelement kan ju variera och strömstyrkan blir givetvis beroende av totala motståndet i kretsen. Vid ett motstånd i yttre kretsen på 100 Ω blir känsligheten av storleksordningen 0,2—0,3 μA/lx vid en cellyta med ungefär 40 mm diameter.

Som nämnts äro fotoelementen mycket användbara för seriemätningar, t. ex. för fabrikationskontroll, för upptagning av ljusfördelningskurvor m. m., och det är väl troligt, att detta »elektriska öga» så småningom kommer att ytterligare förbättras och därmed bli ett av de förnämsta hjälpmedlen i fotometrien.

Tekniska Högskolan, Institutionen för elektrisk anläggningsteknik, fotometerlaboratoriet, maj 1936.

Ett bevis för likheten $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ och en generalisering.

Av **J. BILLING.**

Om $\varphi(x)$ är en integrabel och jämn funktion med perioden π, så kan man på följande sätt bevisa likheten

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,dx.$$

Av likheten [1]

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\frac{1}{x-\nu\pi} + \frac{1}{x+\nu\pi}\right)(-1)^\nu$$

erhålles genom multiplikation med $\varphi(x)\sin x$ och integrering

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)\sin x\,dx}{x} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)(-1)^\nu \sin x\,dx}{x-\nu\pi} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)(-1)^\nu \sin x\,dx}{x+\nu\pi}\right).$$

[1] Härledes lätt ur serieutvecklingen $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_1^\infty\left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi}\right)$ genom användning av relationen $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2} + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)$.

I integralen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)(-1)^\nu \sin x\,dx}{x-\nu\pi}$ sättes $x-\nu\pi = -z$, varigenom den övergår till $\int_{(\nu-\frac{1}{2})\pi}^{\nu\pi} \frac{\varphi(z)\sin z\,dz}{z}$. Substitutionen $x+\nu\pi = z$ i $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)(-1)^\nu \sin x\,dx}{x+\nu\pi}$ ger $\int_{\nu\pi}^{(\nu+\frac{1}{2})\pi} \frac{\varphi(z)\sin z\,dz}{z}$.

Man får alltså

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x)\sin x\,dx}{x} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(\int_{(\nu-\frac{1}{2})\pi}^{\nu\pi} \frac{\varphi(z)\sin z\,dz}{z} + \right.$$

$$\left. + \int_{\nu\pi}^{(\nu+\frac{1}{2})\pi} \frac{\varphi(z)\sin z\,dz}{z} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)\sin x\,dx}{x} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \int_{(\nu-\frac{1}{2})\pi}^{(\nu+\frac{1}{2})\pi} \frac{\varphi(z)\sin z\,dz}{z} =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x)\sin x\,dx}{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\varphi(z)\sin z\,dz}{z} = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)\sin x\,dx}{x}.$$

För $\varphi(x) = 1$ erhålles den kända likheten $\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Dr. S. Wigert har påpekat specialfallet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^{2n+1} x\,dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Skolförsök med Geigers spetskammare.

Iakttagelser av enstaka α-partiklars verkningar.

Av EVA RAMSTEDT.

I denna tidskrifts årg. 10, sid. 101 har förslag lämnats till en del skolförsök inom radioaktivitetens område. Bl. a. omtalas, hur man på ett mycket enkelt sätt med scintillationer kan iakttaga enstaka α-partiklars verkningar. Dessa kunna även lätt demonstreras för ett större auditorium på elektrisk väg medelst en Geigers spetskammare. Den utgöres av en liten cylindrisk jonisationskammare, 5 cm lång och 2,5 cm i genomskärning, den inre isolerade elektroden slutar i en fin spets. Mitt för denna finns en öppning i cylindern, vanligen täckt av ett så tunt stanniol- eller glimmerblad att α-partiklar kunna tränga igenom.

Över en viss minimispänning mellan cylinder och spets kan även en enstaka α-partikel — därigenom att den framkallar stötjonisation i det starka fältet närmast spetsen — ge upphov till en ögonblicklig urladdning, som kan göras iakttagbar. Vid en högre spänning inträder självurladdning genom spetsen, antingen joner finnas närvarande eller ej. Ju högre denna spänning ligger, desto större blir området för spetsens reaktionsförmåga för inträdande joniserande partiklar, desto bättre är alltså spetsen. Dammkorn eller andra småpartiklar, som sätta sig på spetsen, sänka emellertid spänningen för självurladdning, så att reaktionsområdet minskas eller helt försvinner, varför de måste omsorgsfullt avlägsnas.

Det har visat sig ganska svårt att finna lämpligt material för spetsarna, men i en artikel om spetskammens användning för skolbruk, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht bd 38, sid. 222 (1925) påvisar Wulf, att grammofonnålar med fördel kunna användas. Olika metoder att rena dessa ha angivits, bl. a. en lätt glödgning i en bunsenlåga, varvid nålarna överdragas med ett tunt oxidskikt, som synes fördelaktigt för deras reaktionsförmåga. Denna ligger vid 2 000 à 4 000 volt, lägre ju finare spetsen är.

Wulf anger även ett enkelt sätt att erhålla den erforderliga spänningen (se fig. 1, hämtad ur hans artikel), nämligen med en elektricitetsmaskin M och en leidnerflaska L, som kopplas till spetsen av kammaren K. Denna placeras på isolerande material;

B är en Brauns elektrometer, ej nödvändig, men fördelaktig för kontroll av spänningen. Instrumentens yttre beläggningar förbindas med jord, de spänningsförande delarna med spetsen. Kammarens cylinder sättes i förbindelse med det registrerande instrumentet, t. ex. en elektrometer med snabb inställning. Lämplig är den av Wulf konstruerade bladelektrometern (ibid. sid. 217), vars blad är försett med en bygel av kvarts, som ger det en jämn gång. En influensplatta kan inställas så, att bladet får lämplig känslighet. Detta förbindes med jord genom ett motstånd W på 10^9 à 10^{10} ohm.

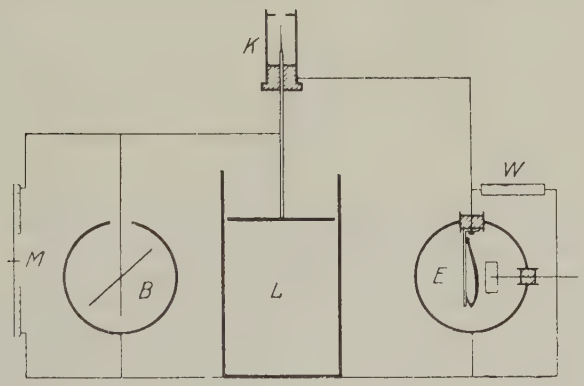


Fig. 1.

Med fördel kan man använda en några cm lång griffel eller ett papper med ett tuschstreck, som avpassas, så att bladet efter uppladdning går lagom snabbt tillbaka. Elektrometern låter sig lätt projiceras.

Försöket kan utföras på följande sätt.[1] Med förbindelsen till spetsen bruten uppladdas leidnerflaskan till en rätt hög negativ spänning och hålles där någon minut. Därefter urladdas den och spetsen kopplas till. Systemet uppladdas ånyo genom försiktig vridning på elektricitetsmaskinen, tills elektrometerns blad börjar slå fram och tillbaka till tecken på att självurladdning äger rum genom spetsen. Man inväntar att bladet åter är stilla eller att endast 1 à 2 urladdningar äga rum per minut, vilka härröra från luftens egen jonisation. Man har då uppnått just den lämpliga spänningen för jonisationsverkningarna, och metoden erbjuder den stora fördelen av automatisk inställning på gynnsammaste

[1] Elektrometern jämte detta försök finnas även beskrivna i Norstedts meddelande om ny materiell häft. 5.

spänning. Föres nu ett preparat, som utsänder ett fåtal α-partiklar — ett sådant brukar medfölja spetskammaren — tätt över cylinderns öppning, gör bladet, om allt är riktigt, tydliga utslag. Dessa komma med olika tidsmellanrum beroende på oregelbundenheten i α-partiklarnas utsändande.

Uteblir verkan av α-partiklarna, beror det vanligen på spetsen, som då får tas ut till ny behandling. Ofta måste detta upprepas flera gånger, innan spetsen visar sig funktionsduglig. Spetsarna kunna också bliva mer eller mindre goda med avseende på funktionsområdets storlek. Då en spets visat sig användbar och urladdning genom α-partiklar pågått en stund, minska utslagen i storlek och upphöra, då spänningen gått ned till minimivärdet. Man kan då åter bekvämt höja den genom att vrida några varv på elektricitetsmaskinen. Ju närmare preparatet föres mot kammarens öppning, desto kraftigare höras knackningarna. Avlägsnas det så småningom, kan man finna gränsen för α-partiklarnas räckvidd.

Ett annat intressant försök är att göra de av α-partiklarna frambragta strömstötarna hörbara medelst elektronrör. Många försöksanordningar med flera rör ha prövats, varvid även betingelserna för särskiljande av α- och β-partiklarnas verkan ha undersökts. Är det bara fråga om en demonstration, kan försöket mycket väl utföras med endast två rör, ett som detektor och ett som förstärkare.

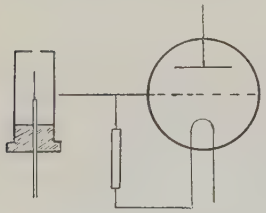


Fig. 2.

Spetskammarens cylinder sättes med en ledningstråd i direkt förbindelse med gittret i detektorröret (se fig. 2), gittret förbindes med katoden genom en gallerläcka. I övrigt införas på vanligt sätt glödkatodens och anodkretsens spänningar liksom kopplingen till förstärkarröret och därmed förbunden högtalare. Elektronrören inställas för funktion. Spetskammarens nål uppladdas negativt på samma sätt som förut nämnts, tills ett knastrande ljud höres i högtalaren till tecken på uppnådd självurladdning. När detta upphört, närmas α-strålpreparatet och man hör då distinkta knackningar med den för α-partiklarna karakteristiska oregelbundenheten. Förklaringen är, att för varje gång en α-partikel förorsakar en urladdning i spetskammaren, laddas cylindern och därmed gittret negativt, vilket hindrar anodströmmen att komma fram. Sedan bortgår gittrets laddning genom gallerläckan, tills den vid ny strömstöt i kammaren återkommer. På grund av förändringarna i anodströmmen uppstå knackningar i högtalaren. Goda resultat ha av förf. uppnåtts med

två rör av äldre typ, nämligen som detektor Philips A 409 (även A 425), och som förstärkare Telefunken R 89. Även β- och γ-strålar kunna inverka vid starkare preparat, men de ge upphov till ett mera susande utdraget ljud.

I dansk Fysisk tidskr. årg. 1932, s. 186 redogör C. B. Madsen för en annan anordning att göra enstaka α-partiklar hörbara, varvid han använder endast ett elektronrör samt ett relä. Det senare insättes i anodkretsen till elektronröret, som måste ge tillräckligt stark ström för att få reläet att fungera. Han anger 2 milliampère.

Här har försöket upprepats med det nyss omtalade förstärkarröret Telefunken R 89 samt ett av svenska telegrafverkets reläer, som fungerar redan vid 5—8 milliampère. Den metallplatta vid vilken reläets kontaktspets är fästad måste ersättas med ebonit eller annat isolerande material. Denna spets förbindes med gittret, som också måste vara isolerat (ej i förbindelse med katoden) och dessutom med spetskammarens cylinder (se fig. 3), ankaret anslutes till den jordade katoden, och själva elektromagneten R insättes i anodkretsen. Sedan göres anodströmmen så stark, att ankaret dras mot elektromagneten. Vid urladdning i spetskammaren får gittret och reläspetsen negativ laddning. Därav avbrytes anodströmmen, ankaret slår tillbaka mot spetsen och urladdar gittret, så att anodströmmen åter kommer fram. Ankarets slag höras liksom knackningarna i högtalaren, dock knappast lika klara som dessa. I anodkretsen kan man även skjuta in en millampèremeter, som slår tillbaka för varje urladdande α-partikel.

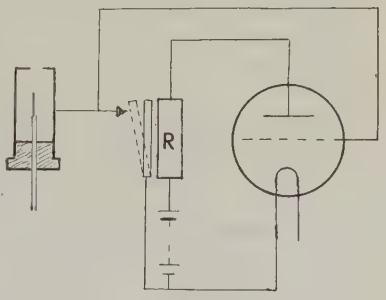


Fig. 3.

Den av här angivna metoder, som är att föredraga beror på platsens resurser. Lättast tillgänglig är väl nu för tiden högtalaranordningen.

Bestämningen av vattnets viktsammansättning.

Av G. STARCK.

Bestämningen av vattnets viktsammansättning är en uppgift, som väl försvarar sin plats bland skolkemiens standardförsök. Den kan sägas ha till mål bestämningen av vätets atomvikt, ett klassiskt problem av fundamental betydelse, som sysselsatt forskarna alltifrån Berzelius fram till våra dagars atomfysiker.

Den i skolan använda metoden är den av Berzelius-Dulong tillämpade: vägning av syre (ur kopparoxid) och av det därav med väte bildade vattnet. Försöket är svårt och som demonstrationsförsök närmast olämpligt, emedan det, utfört med någon grad av omsorg, tar lång tid. MELANDER'S [1] idé att låta kopparoxidens upphettning försiggå i det till förbränningsrör delvis utformade klorkalciumröret självt, varigenom kautschukförbindelser och svårigheten att kvantitativt uppsamla vattnet bortfalla, betydde en stor förenkling och förbättring och medförde en avsevärd tidsbesparing. Fortfarande kan försöket dock knappast fullständigt — med alla vägningar — medhinnas på en lektionstimme, och det är förklarligt, om en lärare tvekar att offra en dyrbar tid för ett mycket ovisst resultat.

Mindre tidsödande är att beräkna viktsammansättningen av proportionen mellan syre- och vätevolymerna, men metoden är otillfredsställande, dels emedan någon verklig bestämning av volymerna vid elektrolysen av vatten aldrig äger rum, utan endast en grov uppskattning, dels emedan man måste stödja sig på andras bestämningar av gasernas spec. vikter.

Nedan angivna metod eliminerar den främsta svårigheten vid Berzelius metod, nämligen vattnets bestämning. I stället bestämmes endast syrets vikt, därjämte det åtgångna vätets volym, varav dess vikt beräknas. Metoden är sålunda en kombination av en ren viktsanalys och en ren volymsanalys och har delvis den senare metodens ovan anmärkta brist. I gengäld är den snabb och lätt att utföra.

[1] Denna tidskrift *9*, 147; 1926.

Syrets vikt bestämmes på vanligt sätt genom vägning av kopparoxid och av genom reduktion härav bildad koppar. Vätets volym bestämmes sålunda, att en vätgasström av konstant och känd hastighet får passera kopparoxiden, och att man bestämmer den tid, som åtgår för reduktionen.

Apparaturen är sammansatt av följande delar, i ordning uppräknade.

1) En vätgasapparat med stor kapacitet, som kan beräknas lämna sammanlagt 1 liter vätgas med konstant hastighet.

2) En tvättflaska med konc. svavelsyra, ett U-rör med fosforpentoxid.

3) En god ligatur, försedd med skruvklämmare, som förbinder 2) med

4) Ett förbränningsrör av i fig. 1 angiven form, den enl. förf:s mening enda rätta i de fall, då vatten bildas vid reaktionen. Avledningsrörets placering förhindrar, att kondensvatten rinner tillbaka i det heta röret.

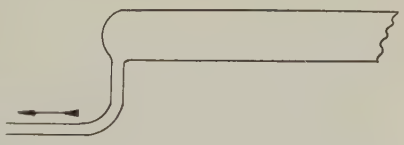


Fig. 1.

5) Ett avledningsrör.

6) Ett ograderat, ensidigt slutet glasrör för vätgasens uppsamlande, fyllt med vatten och med mynningen under vattenytan i en liten glasskål. Denna skål skall vara fylld till brädden och själv stå i en större, tom skål, som upptar utrinnande vatten. Endast så får vätgasen ett konstant mottryck att övervinna — ett av villkoren för en konstant vätgasström. Rörets totalvolym skall vara känd och utgöra 150—200 ml.

Till apparaturen hör ett tidtagarur.

Försöket utföres på följande sätt.

1) Ett skepp väges, beskickat med cirka 1 g torr kopparoxid, och insättes i förbränningsröret.

2) Apparatens delar hopkopplas, mätröret fyllt med vatten av rumstemperatur.

3) Vätgasapparatens kran öppnas helt; skruvklämmaren inställes på lämplig hastighet: cirka 50 ml/min. Härunder får vätgasen gå ut i luften.

4) Avledningsröret skjutes under mätröret, och i samma ögonblick sättes tidtagaruret i gång. Omedelbart därefter börjar upphettningen av kopparoxiden, först kraftigt, så att reduktionen kommer i gång, därefter med minskad låga. Så fort reduktionen börjat, minskar eller upphör vätgasströmmen genom avledningsröret. Det

kan även hända, att sugning inträder vid början av reduktionen; den bör undvikas, emedan den inverkar något på gasströmmens hastighet, och förhindras dels genom en tillräckligt stor hastighet av gasströmmen, dels genom att man värmer förbränningsröret omkring skeppet, så att vattenångan ej kondenseras omedelbart.

5) När kopparoxiden är i det närmaste reducerad, börjar vätgas så småningom avgå ur avledningsröret, till sist med den ursprungliga hastigheten. När mätröret just är fyllt med gas, arreteras stoppuret, och tiden avläses. Vätgasen får strömma med oförändrad hastighet.

6) Utan att för övrigt något av apparaturen ändras eller flyttas fylles mätröret ånyo med vatten, och tiden för dess fullständiga fyllande med vätgas bestämmes. Temperatur och barometerstånd avläsas.

7) Beräkningen av vattnets sammansättning framgår av följande anteckningar över ett godtyckligt valt försök.

Tid för reduktion och bildning av 205 ml väte ..... $13^{m}\ 36^{s}0$
Tid för bildning av 205 ml väte ..... $2^{m}\ 46^{s}8$

Endast för reduktionen ha åtgått $\frac{816.0}{166.8} \cdot 205$ $\quad 205 = 798$ ml väte

Vikt av 798 ml väte (19°,760 mm) $= 0.798 \cdot 0.0829 = 0.0662$ g

Kopparoxidens viktsförlust	0.5313 g
Vattnets sammansättning: väte	0.0662 »
syre	0.5313 »
vatten	0.5975 »
% väte i vatten, funnet	11.07
ber.....	11.19

I nedanstående tabell över de enligt denna metod utförda bestämningarna av vattnets sammansättning betyder t_1 tiden för reduktion och fyllning av mätröret, t_2 tiden för mätrörets fyllande.

Syre g	Mätrör ml	t_1	t_2	% *H*
0.7969	205	26 m 20.4 s	3 m 54.0 s	11.0
.5536	205	7 m 8.0 s	1 m 23.6 s	11.2
.5313	205	13 m 36.0 s	2 m 46.8 s	11.1
.2135	205	12 m 30.0 s	4 m 53.6 s	11.1
.3273	205	11 m 23.2 s	3 m 35.0 s	10.2
.4581	205	7 m 11.0 s	1 m 48.0 s	10.2
.1134	205	6 m 12.0 s	3 m 10.6 s	12.3
.2960	111	21 m 12.6 s	4 m 8.4 s	11.3
.3397	111	9 m 13.4 s	1 m 45.8 s	10.3
.4013	205	13 m 28.2 s	3 m 26.6 s	10.9

Det sist upptagna försöket utfördes under en lektion. Ungefär hälften av resultaten äro goda, de övriga kunna betecknas som acceptabla. Tiderna visa, att försöket, vägningarna inberäknade, lätt medhinnes på en lektionstimme. Tidtagningen kan lämpligen skötas av ett par elever, varigenom försöket vinner i intresse. Slutligen är att nämna, att vätgasströmmens konstans kontrollerats, varvid det visat sig, att en vätgasapparat av Uppsalamodell, någorlunda nyfylld, ger en ström av konstant hastighet.

Bokanmälningar.

James Jeans, *Genom tid och rum.* Natur och Kultur 1936. 198 sid., kr. 6: 90, inb. 8: 90.

»Genom tid och rum» föras vi på en snabb rundresa under ledning av den rutinerade guiden James Jeans. Han känner sitt pass och demonstrerar effektfullt de beprövade turistattraktionerna. Den som redan länge berest länderna i fråga får knappast se mycket nytt, men det var väl ej heller att vänta. För övrigt går resan genom så vidsträckta områden, att blott få torde ingående känna dem alla; och även där man ej finner något sakligt nytt, är det intressant att se välkända ting i ny och slående belysning. För de ej initierade är resan givetvis mycket lärorik. Riktigheten av de sakupplysningar som lämnas kan rec. på grund av de skildrade områdenas stora utsträckning och skiftande natur endast delvis bedöma; dock förefaller det som om förf. emellanåt varit litet slarvig med sina sifferuppgifter och andra påståenden. Några detaljer ha för övrigt korrigerats i noter av den svenske granskaren, prof. K. Lundmark. Att många problem framställas starkt förenklade är ju oundvikligt i en populär bok av denna art, men man tycker ibland att förf. går väl långt i den vägen.

Resan börjar på jordens yta, där vi bl. a. få jordens rotation och klotform demonstrerade. Ned i jordens inre resa vi med de seismiska vågornas hjälp. Studiet av de olika geologiska formationerna för oss tillbaka i tiden tusentals millioner år. Vi få i stora drag lära känna jordens utvecklingshistoria och se några ögonblicksbilder av de vidunder, som en gång befolkade den. Sedan går resan upp i atmosfären och visar oss dess sammansättning och temperatur m. m. på olika höjd, de olika strålnings-

arter, som genomkorsa den och annat sådant. Vi fortsätta upp till himlavalvet för att av solens, stjärnornas och planeternas rörelser och strålning sluta oss till universums byggnad. I närbilder av månen och planeterna te de sig föga lockande till ett verkligt besök. Då vi sedan fortsätta till solen, se vi fördelningen av väte och kalcium över dess yta, solfläckarnas och protuberansernas byggnad m. m. och finna vid en återblick på jorden samband mellan solfläckarnas frekvens och geofysiska och botaniska data. Mer indirekta slutsatser ge oss oerhörda temperaturer om tiotals millioner grader i solens inre.

För att fortsätta till stjärnorna ha vi ju som huvudsakligt hjälpmedel kikaren, kombinerad med spektroskop och fotometer, vilka visa oss en följd av typer ända från röda jättar till vita dvärgar och vilka även redogöra för stjärnornas rörelser. Kort antydda statistiska betraktelser upplysa oss om omfattningen av vårt stjärnsystem, Vintergatan. I sista etappen lämna vi även dess gränser för att ur studiet av de millioner ljusår avlägsna nebulosorna få ytterligare upplysning om universums byggnad och finna sannolikheten för att det befinner sig i snabb utvidgning.

Bokens utstyrsel är på det hela taget god. Alla autotypier äro samlade till särskilda planscher, vilket medföra den fördelen att boken i övrigt kunnat tryckas på för ögat behagligt oglättat papper, men bilderna komma då lätt långt från motsvarande text. Man skulle därför önska att det vid hänvisning till en bild också omtalas var i boken bilden är att finna.

Sven Benner.

P. Debye, *Kernphysik.* S. Hirzel, Leipzig 1935, 34 sid.

Lise Meitner och Max Delbrück, *Der Aufbau der Atomkerne,* natürliche und künstliche Kernumwandlungen. Julius Springer, Berlin 1935, 62 sid.

Båda dessa broschyrer äro bearbetningar och utvidgningar av förut hållna föredrag och åsyfta att medelst en del typiska exempel utan matematisk behandling ge inblick i kärnfysikens nuvarande ståndpunkt.

De innehålla synnerligen klara och medryckande framställningar i stora drag av olika kärntransformationsförsök med utgångspunkt från Rutherfords iakttagelse år 1919, att α-partiklar i sällsynta fall ur kväveatomers kärnor utstöta vätekärnor, protoner. Delvis med stöd av belysande fotografier enligt Wilsonmetoden, några utförda vid det Meitnerska laboratoriet, redogöres särskilt för de senaste fyra årens fenomenala utveckling inom detta område. Å ena sidan

upptäckten av de nya atomfragmenten, neutroner och positroner, vilken medfört den förändringen i vår uppfattning, att kärnan ej mer anses innehålla fria elektroner utan vara direkt uppbyggd av neutroner och protoner. Å andra sidan de nya bombarderingsprojektilerna som utgöras av, dels i starka elektriska fält accelererade protoner och deutoner (den tunga väteisotopens kärnor), dels neutroner, vilka genom frånvaro av positiv laddning hava lättare att träda i reaktion även med de tunga atomernas kärnor och förorsaka omlagring i dem, varvid positroner eller elektroner utstötas. Mest verksamma i detta avseende synas de långsamma neutronerna vara.

Då Wilsonfotografier visa, att kärnorna upptaga de påstötande fragmenten och utsända andra, komma de nybildade atomkärnorna att kunna ha många varierande sammansättningar. Ofta bildas kända ämnen eller deras stabila isotoper, men i en del fall förut okända instabila kärnor, som först vid en följande omlagring övergå till stabila under utsändande av positroner eller elektroner, varvid omvandlingen efter bestrålningens upphörande avtar efter en exponentiallag på samma sätt som hos de naturliga radioaktiva elementen. Den första upptäckten av dessa med konst framställda radioaktiva ämnen gjordes som bekant av forskarparet Curie-Joliot (se Osvald Lundquist, denna tidskrifts årgång 18, sid. 95).[1]

Exempel på sådana möjliga och iakttagna atomtransformationer och därvid förekommande energiomsättningar diskuteras också, mest ingående av Meitner och Delbrück, liksom slutsatser dragas om partiklarnas massa, kärnans konstitution och reaktionerna åtföljande strålning. De sist nämnda författarna uppta även i ett särskilt kapitel kvantmekanikens viktigaste lagar med deras tillämpning på atomkärnorna. Där redogöres i korthet för Gamows hypotes om α-partiklarnas uppkomst och i allmänhet för de olika strålslagens samband med kärnans konstitution. Trots att en mera ingående teoretisk behandling ej kunnat medtagas, får man dock en god och intressant överblick av själva problemställningen.

Eva Ramstedt.

[1] Benämningen inducerad radioaktivitet, som enligt engelskt mönster stundom användes på dessa nya ämnen, synes i det avseendet mindre lämpligt att det tidigare begagnats i annan betydelse nämligen för de av radioaktiva emanationer spontant bildade radioaktiva beläggen. Riktigare synes vara att kalla de nya elementen konstgjorda eller artificiella radioaktiva ämnen (tyska künstlich, franska artificiel), varigenom förhållandet till de naturliga radioaktiva ämnena tydligt framträder.

Sven Benner, *Den moderna fysiken och dess begränsning.* Sv. Kristl. Studentrörelses förlag, 1936, 128 sid., häft. kr. 2:50.

Denna bok tillhör en s. k. apologetisk skriftserie, men den är ett rent fysikaliskt arbete, vilket motiverar dess anmälning i denna tidskrift. Det enda, som kan förklara, att boken fått plats i skriftserien i fråga, skulle väl vara slutkapitlet om 30 sidor av bokens 128. Detta behandlar den moderna fysiken ur kunskapsteoretisk synpunkt. Det bidrager i själva verket att göra boken så mycket värdefullare rent fysikaliskt sett.

Förf. har enligt förordet avsett sin bok som ett bidrag till belysningen av livsåskådningsproblemen. Den modernaste fysikens betydelse härutinnan, säger förf. med rätta, kan mäta sig med den, som den klassiska fysiken hade under sin storhetstid från Newtons dagar till 1800-talets slut. Tendensen i fysiken är nu, säger förf., en annan. Men så mycket legitimare är, menar han, allmänhetens krav nu på vederhäftig upplysning. Detta krav har förf. velat tillgodose men icke det »mera kuriositetsbetonade intresse», som vissa tidigare popularisatorer (Jeans?) »väl mycket synas inrikta sig på att tillfredsställa».

Boken börjar med ett kapitel om den klassiska fysiken, en mycket givande exposé. Sedan kommer ett kapitel om »Relativiteten i mekaniken», en synnerligen klar framställning av relativitetsteorien — trots det knappa utrymmet av 28 sid. De följande kapitlen behandla »Brytningstiden i atomfysiken» och »Den nya atomfysiken». Här hopa sig givetvis svårigheterna för en populär framställning, men förf. kan nog sägas ha gjort allt vad rimligen kan göras för att ge en inblick i de nya tankegångarna. Så kommer slutkapitlet »Vidare vyer» med som nämnts en mera kunskapsteoretisk diskussion.

Med tacksamhet noteras, att en så viktig sak som Heisenbergs osäkerhetsrelation fått en ganska utförlig behandling. Dels ges en mera praktisk motivering av denna märkliga lag genom resonemanget om omöjligheten att *iakttaga* exempelvis en elektrons läge och rörelse i ett visst ögonblick på grund av att iakttagelsen ändrar förhållandena. Omöjligheten i fråga omnämnes på annan plats ur vågmekanikens synpunkt. En materiell partikel betraktas som en våggrupp, och denna kan definieras mer eller mindre godtyckligt, med t. ex. en skarp begränsning, varvid hastigheten blir mera odefinierad, eller tvärtom. I förra tolkningen är emellertid omöjligheten att exakt konstatera både läge och rörelse icke så principiell som i den senare, ty i senare fallet ligger den i materiens natur enligt vågmekanikens uppfattning. Här hade man önskat en klargörande diskussion.

Från vågmekanikens synpunkt behandlas också de komplementära begreppen energi och tid, till sist även komplementariteten mellan rum-tid-beskrivning och kausalitet. Här nämner förf. det paradoxala faktum, att man vid t. ex. interferensen mellan elektroner, som passera två hål i en skärm, icke kan ernå en kausal beskrivning av interferensen, så länge man envisas att tänka sig elektronen gå genom ett bestämt hål. Endast genom att avstå från åskådliga bilder av processen och exakta värden på de storheter, som bestämma den, kan man, säger förf., få en i möjligaste mån exakt förklaring av resultatet. Påståendet verkar väl paradoxalt tillspetsat.

I slutkapitlet relateras Bohrs idé om en osäkerhetsrelation av högre ordning: en fullständig analys av en levande organism måste förutsätta att organismen dödas. En fullständig analys är här komplementär till livet; de utesluta varandra fullständigt. Som en ytterligare analogi kommer så, om man så vill, det kända faktum, att varje försök att genom själviakttagelse vinna kännedom om det egna själslivet ändrar medvetandets innehåll.

I övrigt handlar slutkapitlet om den positivistiska synen på existens och fenomen till skillnad från den realistiska. Även här är förf. huvudsakligen refererande. Det är företrädesvis P. Jordans synpunkter som anföras.

Boken kompletterar på ett värdefullt sätt Oscar Kleins bok »Orsak och verkan»; för den akademiskt skolade nämligen som vill få en djupare inblick i ämnet. Och det är ju viktigt för den som har att undervisa i fysik, låt vara på ett lägre stadium. För den däremot, som saknar akademisk eller motsvarande utbildning i ämnet, torde boken vara ett förseglat dokument. Vilket icke är författarens fel. En utomstående må ha aldrig så hög utbildning eller kompetens i humanistiska eller över huvud icke-matematiska discipliner, så torde han ingenting ha att hämta ur sådana s. k. populära framställningar. Det är nog ett hopplöst företag att för utomstående framställa den modernaste fysikens naturuppfattning. Ett beklagligt faktum, vilket likväl icke hindrar, att sådana böcker som denna dock ha en stor uppgift att fylla.

Conrad Lönnqvist.

A. Lindström, *Teoretiska grunder för elektrotekniken*, A.-B. Seelig & C:o, Stockholm 1935, 132 sid., 119 fig., kr. 8: 25.

Den elektrotekniska fackutbildningen, såväl den högre som den lägre, brukar inrymma lärokurser i allmän teoretisk elektroteknik incl. elektricitetslära. Till skillnad från fysikkursen, vilken det ju främst tillkommer att beskriva och inordna de elektromagnetiska

företeelserna i den övriga världsbilden, syfta dessa kurser mot att ge en praktiskt avvägd och koncis överblick av elektricitetslärans grundlagar och att sedan använda dessa för lösning av olika tekniska problem. Vanligtvis lägges därvid huvudvikten på den metodiska och systematiska sidan av framställningen, medan de matematiska eller tekniska detaljfrågorna allt efter omständigheterna ägnas olika uppmärksamhet. Dylika kurser avse att skänka teknikern ett så vitt möjligt enkelt och användbart verktyg, vars arbetssätt och begränsning han måste lära sig väl känna till för att med framgång kunna bruka det vidare på egen hand.

Ovan nämnda bok av prof. A. Lindström utgör en kort lärokurs i teoretisk elektroteknik med det angivna syftemålet. Boken torde dock i främsta rummet vara avsedd som teoretisk inledning till den s. k. starkströmstekniken. Framställningen av elektromagnetismen bygger huvudsakligen på det Faraday-Maxwellska betraktelsesättet. Heuristiska överläggningar och enkla, mera till åskådningen vädjande resonemang omväxla med exakt matematiska metoder. Den matematiska apparaten är väsentligen elementär. Överhuvud krävas av läsaren förkunskaper i matematik och fysik, som endast obetydligt överskrida kurserna på gamla reallinjen.

Beträffande innehållet må nämnas, att en avsevärd del av utrymmet — nära halva boken — ägnas åt det elektrostatiska fältet. Härpå följa ett par kortare kapitel om den elektriska strömmen och magnetostatiken. Elektromagnetismen är uppdelad på tre kapitel betecknade: Elektromagnetism, Elektromagnetisk induktion och Energiström; det sistnämnda är emellertid helt kort. Tekniska tillämpningar förekomma rikligt, inflickade i lämpligt sammanhang med det övriga lärostoffet. Växelströmsteorien och teorien för elektromagnetiska vågor behandlas icke. En utförligare redogörelse för innehållet finnes i Tekn. Tidskr. Elektroteknik nr 1, 1936.

Ehuru prof. Lindströms bok har givits en relativt speciell och fackbetonad utformning, finnes åtskilligt däri, som bör vara av intresse också för fysiker och ingenjörer i allmänhet och särskilt för dem, som ha att undervisa i elektricitetslära eller elektroteknik på elementarstadiet. Boken presenterar flerstädes synpunkter och metoder, vilkas pedagogiska förtjänster torde väl ha prövats under författarens mångåriga verksamhet som föreläsare och lärare. Genom att i enkel och lättfattlig form meddela och framdeducera många för elektrotekniken viktiga resultat, t. ex. uttrycken för kapacitets- och induktionskoefficienter för olika system av parallella ledare, fyller den också på ett förtjänstfullt sätt en länge känd lucka i den svenska facklitteraturen på området.

K. Dahr.

Fr. A. Osborn, *Physics of the Home.* Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York and London 1935. 441 sid., 254 fig., bunden 18 s.

Nya uppslag för anknytandet av fysikundervisningen till det praktiska livet torde varje fysiklärare vara tacksam för. Ovannämnda arbete, en lärobok i fysik för studerande i huslig ekonomi, inriktar sig direkt på att tillgodose dem, som studera fysik »not for its own sake but for its real help in their daily life». Att boken i första hand är skriven för kvinnliga läsare medför en relativt utförlig behandling av tvättmaskiner, dammsugare o. d., men det mesta av de ämnen, som behandlas, uppvärmnings- och belysningsproblem, alarmanordningar för eldsvåda m. m., bör kunna intressera pojkar minst lika mycket som flickor.

Boken förutsätter enligt förordet inga nämnvärda förkunskaper i fysik, vilket förklarar den stundom ytterst elementära framställningen. Stora delar av kursen förefalla å andra sidan under dessa förutsättningar väl svårsmälta. Författaren är frikostig i fråga om tabeller och kvantitativa beräkningar, av vilka en del torde kunna ge idéer till räkneuppgifter även för gymnasiet. Den teoretiska framställningen är också i övrigt på vissa punkter överraskande ingående, så t. ex. i fråga om färger och färgsammansättningar, belysningsproblem o. d.

Varje kapitel avslutas med tillämpningsexempel med lösningar, övningsexempel med facit, förslag till laborationsövningar, ofta dock av typer, som ej lämpa sig för utrustningen på våra skollaboratorier, och till sist ett kort sammandrag av kapitlets innehåll. Dessutom avslutas arbetet med ett hundratal repetitionsfrågor. Illustrationerna äro i många fall utmärkta.

Den, som eventuellt ger sig in på studium av detta arbete i hopp att på var eller varannan av dess 441 sidor finna något av värde, den blir säkert besviken. Men den, som nöjer sig med att här och där finna ett intressant avsnitt eller ett värdefullt uppslag, den rekommenderar jag att skaffa sig boken.

Anna Nordberg.

E. H. Duckworth and R. Harries, *The Laboratory Workshop,* A Simple Course in Apparatus Making and the Use of Tools. G. Bells & Sons, London 1933, 246 sid., 10 s.

Boken är avsedd som handledning för sådana lärare, som icke hava någon större erfarenhet av de vanliga verktygen och deras handhavande.

Först finnes en förteckning över verktygen med avbildningar. Denna förteckning är uppdelad i två avdelningar, en standard-

uppsättning och en för kompletteringar. Redan här framträder bokens lämplighet för skolbruk, ty svarv och maskinhyvel äro ej medtagna. De största verktygen äro skruvstäd och vanliga borrmaskiner.

Den därpå följande materialförteckningen upptager lämpliga dimensioner av plåt, profiler, rör och stänger, skruvar, nitar, spik, Meccano-delar m. m.

Beskrivningen av verktygens handhavande är gjord med tydlig erfarenhet av nybörjarens misstag och svårigheter. Skärning, gängning, lödning, träarbete, elektriska ledningsarbeten och glasarbeten behandlas var för sig. Sedan följer instruktion för arbetsritningar. Denna indelning gör boken användbar som *uppslagsbok* för såväl lärare som elever.

Ej mindre än 53 sidor upptagas av apparatbeskrivningar, som dock torde vara av mindre intresse. De verka alltför »praktiska»!

Illustrationernas antal är 436, varav 8 planscher.

B. Pettersson.

P. T. Cleve—H. v. Euler, *Kvalitativ kemisk analys*, 8 uppl., omarbetad och tillökad av Tore Philipson och Stig Proffe. Hugo Gebers förlag (del II av P. T. Cleve och O Widman, Handledning vid kemiska laborationsövningar), Stockholm 1935, 159 sid., klotb. kr. 3: 75.

För denna välbekanta handlednings användbarhet och popularitet talar antalet upplagor. Den nu föreliggande upplagan utgör en ganska genomgripande omarbetning av den föregående (1923): oväsentliga och föråldrade partier ha uteslutits och på många punkter ha ändringar och tillägg gjorts. En omfångsökning av 26 sidor har därvid ej kunnat undvikas.

Den fysikalisk-kemiska delen, »lösningsteoriens grunder», har sålunda i viss omfattning anpassats efter moderna teorier, varvid särskilt hänsyn tagits till de starka elektrolyternas dissociation.

Framställningen av analysen på våta vägen har även undergått åtskilliga förändringar. Sålunda ha bl. a. »metoder för arsenikprövning uteslutits» och många tillägg gjorts i syfte att underlätta översikten av och förståelsen för det analytiska arbetet.

En liten oriktighet, som ärvts från föregående upplagor, är, att formeln $pv = \frac{p_0 v_0}{273} T$ kallas för Gay-Lussacs lag. — Härledningen av uttrycket för den molekylära ledningsförmågan är ur didaktisk synpunkt otillfredsställande. — Beteckningen »grmol» är tautologi.

Ett närmare ingående på föreskrifterna för det praktiska analysarbetet må av utrymmesskäl anstå.

Vad bokens typografiska utstyrsel ankommer, gäller generellt den anmärkningen, att lagar, viktigare slutsatser och föreskrifter i större utsträckning, än vad som är fallet, borde ha poängterats genom spärrad eller kursiverad stil.

Enligt anmälarens mening skulle handledningens användbarhet ytterligare ökas, om analysgången för de olika grupperna vid sammansatta prov sammanfördes till ett ställe och gåves en mera översiktlig ev. tabellarisk form. I detta sammanhang kan ifrågasättas, huruvida det med hänsyn till bokens karaktär av elementär handledning kan vara lämpligt att medtaga så många varianter av vissa delar av analysgången, som boken gör (detta avser naturligtvis icke de vid varje jonart nyttiga och nödvändiga kontroll- och identitetsproven).

Dessa önskemål och anmärkningar kunna ej bortskymma arbetets förtjänster, vilka genom den nu föreliggande omarbetningen i hög grad ökats.

Ehuru avsedd för universitet och högskolor torde boken även vara användbar som underlag för det enskilda arbetet i kemi vid våra gymnasier.

Nils Wigren.

Anton Bokelid, *Lärobok och övningsuppgifter i geometri,* realskolans kurs, C. E. Fritze, Stockholm 1936, 77 sid., kr. 1:80.

Samtliga geometriböcker, som användas i realskolan, äro satta på B-listan, en åtgärd, vars nödvändighet jag inte tror på. Se vidare en bokanmälan av C. E. Blom i föregående nummer av tidskriften. I de där framlagda synpunkterna torde väl de flesta matematiklärare lugnt kunna instämma. Vi ha ju vid läroverken — även i realskolan — studerat geometri med två bestämda avsikter, den ena att meddela kunskap om de geometriska sanningarna, den andra att ge ett bestämt och levande intryck av geometrin som en logisk tankebyggnad. Det är att hoppas, att läroboksförfattarna, både omarbetarna och de som försöka få fram helt nya böcker, försöka och lyckas bevara just den logiska klarheten och redan. Vissa av de gamla satserna — ehuru icke många — kunna ju utelämnas från realskolans kurs. Vissa andra kunna ju byggas på åskådningen (mera sympatiskt vore enligt min mening att ge bevisen men ej fordra deras inlärande) men då får man också tala om, vad man gör, och inte inbilla eleverna, att uppritandet av en lämpligt tillrättalagd figur är likvärdigt med ett bevis.

Ut ur dessa synpunkter måste jag reagera mot föreliggande arbete, som i stor utsträckning släppt kravet på logisk klarhet och reda. Symptomatiskt är att det gamla fina ordet definition ej

förekommer (utom i företalet) men att ordet axiom förekommer dess oftare ehuru ej definierat. Visserligen komma nog eleverna att fatta meningen: »En geometrisk sats, som är så enkel att man — så att säga — av sig själv inser sanningen av det påstående den innehåller, kallar man ett axiom», som en definition, men detta är väl ändå ej meningen. Hur författaren handskas med definitioner och axiom framgår av lärogången i kap. II, Om cirklar. Först »Sats 1 (axiom) Om en punkt ligger inom en cirkel, så är dess medelpunktsavstånd mindre än cirkelns radie.» Så kommer »Sats 2 (axiom) Om en punkt ligger utanför en cirkel, så är dess medelpunktsavstånd större än cirkelns radie.» Och därefter »Sats 3 Om avståndet från en punkt till medelpunkten i en given cirkel är lika med cirkelns radie, så ligger punkten på cirkeln, om medelpunktsavståndet är större än radien, ligger punkten utanför cirkeln, om det är mindre, ligger den inom cirkeln.» *Därefter* kommer cirkelns definition under rubriken: Anm. Varför all denna logiska oreda, som sannerligen inte ens sparar tid? Definierades cirkeln först, blir ju resten en självklar följd (ehuru ej axiom), som kunde tas i en anmärkning utan all högtidlighet.

Den första sats förf. anser behöva ett genomfört bevis är följande: Två sträckor som äro lika långa, kunna läggas på varandra så, att de sammanfalla till alla delar. Beviset är ett skenbevis, ty att två sträckor äro lika långa innebär just, att de kunna fullständigt täcka varandra, omedelbart eller medelst en tredje, måttbandet. Efter detta »bevis» refererar förf. förflyttningsaxiomet, som han dock ej tycks lita på, ty senare bevisas motsvarande satser även om ett par lika vinklar och ett par cirklar med samma radie. Förflyttningsaxiomet kallas f. ö. ej axiom. Detta namn reserveras i allm. för de satser som ej bevisas. De gamla aritmetiska axiomen nämnas ej alls. De äro måhända ändå klarare än axiom.

Om författarens terminologi vore en hel del att säga. Att ändra gamla vedertagna ord är enligt min mening högst olämpligt, om ej ifrågavarande ord visat sig olämpliga. De gamla termerna teorem och problem användas ej i denna bok. Ett teorem kallas en sats, ett problem konstruktionsuppgift. Konstruktion användes men ej verbet konstruera. I stället säger förf. teckna, som ju i matematisk terminologi ges en annan användning »teckna ett uttryck». Alternatvinklar kallas växelvinklar, vertikalvinklar korsvinklar, transversal tvärlinje. När två linjer skäras av en tredje, uppstå vinklar, om vilka på min skoltid sades, att de stå innantill på samma sida. Senare har uttrycket motställda vinklar använts. Att som förf. om dessa vinklar säga närliggande, synes

mig olämpligt. För inte detta tanken närmast till sidovinklar? Man får ovillkorligen det intrycket att förf. till varje pris velat ändra, oavsett om något talar för ändringen eller ej. Att ändra teoremens antagande till givet, synes mig inte heller påkallat, ännu mindre att inrycka konstruktion för beviset i beviset självt.

Likformiga figurer definieras så att *motsvarande* vinklar äro lika och *motsvarande* sidor proportionella utan tanke på att det ena motsvarande hänger i luften. Att en rektangels yta är = produkten av bas och höjd visas upp för det fall, att sidorna äro hela tal. Att andra fall finnas omnämnes ej.

Genomgående numrering saknas. Sats 1 återfinnes sålunda på ej mindre än 11 ställen.

Begreppet omvändningssats saknas. Typiskt är därvidlag framställningen sid. 66, där förf. visar, att en cirkel tydligen ej kan omskrivas kring vilken fyrhörning som helst. Detta resulterar emellertid ej i satsen om, när en cirkel kan omskrivas kring en fyrhörning, utan i omvändningssatsen. För egen del anser jag detta med omvändningssatser vara en viktig sak, just att visa, att vissa satser kunna vändas om men ej alla.

På sid. 36 har förf. gjort sig stort besvär med att bevisa en sats, som helt enkelt är falsk. Det är sats 6: »Varje punkt utanför en vinkels halveringslinje ligger närmast det vinkelben, som ligger på samma sida om denna linje.» Vinkeln är entydigt ritad (alltså ej två linjer, som skära varandra) och punkten tillåtes ligga även utanför vinkeln. Om förf. skulle ta och lägga punkten på (den tänkta) förlängningen av det ena vinkelbenet och se efter, hur det blir då! Vilket vinkelben punkten ligger närmast beror på dess läge jämfört med såväl den givna vinkelns som dess yttervinkels bissektris.

Det skall bli intressant att se, om boken kommer att gå. En matematiker kan ju i dessa tider vänta sig nästan allt.

Bengt E. Nyström.

Hedström-Öije, *Arbetsuppgifter i ekvationslära.* Del II. Ekvationer med flera obekanta jämte problem, kvadratrötter, planimetri, stereometri, ekvationer av andra graden jämte problem. Sv. Bokförlaget (Bonniers) 1936, 153 sid., kr. 3:—.

Första delen av »arbetsuppgifterna», som utkom hösten 1934 och då omnämndes i denna tidskrift, har nu följts av en andra del, innehållande återstoden av realskolans kurs i ekvationslära. Det goda intryck, man fick av första delen, befästes av den nu utkomna, och läroboklitteraturen i matematik har med detta

arbete fått ett värdefullt tillskott. Som titeln anger, är boken avsedd för självstudier vid sidan av undervisningen i skolan. Helt säkert kan en lärjunge, som med tillhjälp av »arbetsuppgifterna» vill förbättra sina kunskaper i matematik, också vinna åtskilligt i den vägen, även om han skall finna, att det är många problem i samlingen, som han ej kan klara på egen hand.

Några smärre anmärkningar har jag att framföra. Förff. ha utelämnat arbetsproblem och addition och subtraktion av algebraiska bråk. Då exempelsamlingen i övrigt omfattar de problemtyper, som man av gammalt exercerar med, borde väl även de ovan nämnda varit representerade. Bråkräkning brukar ju inte höra till elevernas starka sida, varför en del övningsuppgifter av det slaget nog inte skadat. Andra delen uppges innehålla (se ovan!) ekvationer med flera obekanta. »Flera» måste i detta fall sättas lika med två. Vid lösning av ekvationssystem enligt additionsmetoden skadar det ej att framhålla, att division med för termerna gemensamma faktorer bör ske, då sådant kan förekomma och är lämpligt. I den å sid. 50 (del II) framställda regeln för beräkning av antalet tillförlitliga siffror i produkten av två kvadraträtter borde påpekas, att den långa multiplikationen ofta kan undvikas genom att skriva båda talen under samma rotmärke. I uppgifter på cirkeln är det ofta fördelaktigare att utbyta en ev. förekommande division med π mot multiplikation med $\frac{1}{\pi}$ (0,318). Svaret på typex. 2 sid. 60 har avrundats på måfå. Anledning härtill saknas, då boken innehåller en bra regel för avkortning vid räkning med approximativa tal. Ex. 19 sid. 92 har dubbellösning; i facit endast ett fall. Ordet proportionalitetsfaktor, som användes i ett typexempel, borde inte tas upp så där i förbigående. Redan uttalet av detta ord erbjuder stora svårigheter för många elever. Hur besvärligt skall det då inte vara att behöva använda det för att lösa ett i sig själv kvistigt problem?

Verner Carlson.

Gradualavhandlingar.[1]

NILS HELLSTRÖM, *Halogenättiksyror och tioglykolsyra,* Gleerupska Univ.-Bokhandeln, (Håkan Ohlssons boktryckeri), Lund 1935. 5 kr. Disp. $^{23}/_{11}$ 1935. Opponenter: docent ERIK LARSSON, amanuens E. THOMÉ, t. f. professor GUY S:SON FREY.

För att undersöka förhållandena vid omsättning av en merkaptan med en haloidester studerades monohalogenättiksyrors, resp. dessas amiders samt även di- och triklorättiksyrors förhållande till tioglykolsyra.

Med *monohalogenföreningarna* erhöllos följande resultat:

Förelåg tioglykolsyran som sekundärt salt följde omsättningen det bimolekylära hastighetsschemat och uppvisade sådana salteffekter, som voro att vänta vid en dylik reaktion mellan joniserade föreningar enl.:

$$\bar{O}COCH_2\bar{S} + Hlg \cdot CH_2C\bar{O}\bar{O} = \bar{O}COCH_2SCH_2C\bar{O}\bar{O} + H\bar{l}g., \quad (I).$$

Förelåg tioglykolsyran som fri sulfhydrylförening nedsattes dess reaktionsförmåga betydligt och särskilt med jodföreningarna uppträdde oväntat en ny reaktion, som i vattenlösning följde schemat:

$$2HOCOCH_2SH + JCH_2COOH = (HOCOCH_2S)_2 + CH_3COOH + HJ, \quad (II),$$

men i bensollösning eller i frånvaro av lösningsmedel förlöpte den enligt:

$$2HOCOCH_2SH + 2JCH_2COOH = (HOCOCH_2S)_2 + 2CH_3COOH + J_2, \quad (III).$$

Även dessa reaktioners kinetik undersöktes närmare.

Förelåg tioglykolsyran som tung metallförening med kvicksilver, zink, silver, kadmium och bly inträdde omsättning under sulfidbildning, jmfr (I).

Med *diklorättiksyra* inträdde en mätbar reaktion med tioglykolsyra blott i alkalisk lösning, varvid en mol dikloracetat, två moler alkali, men mindre mängd tioglykolsyra förbrukades och glyoxylsyra bildades. Med stöd av kinetiska mätningar kunde dessa förhållanden uttryckas genom formlerna:

$$NaOCOCH_2SNa + Cl_2CHCOONa = NaOCOCH_2S \cdot CHClCOONa + NaCl,$$
(långsam) (IV, aa),

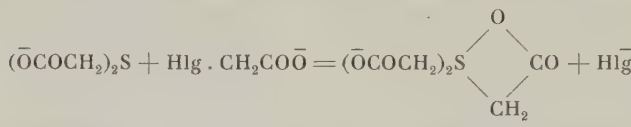
[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

$$NaOCOCH_2S\,.\,CHClCOONa + NaOH = NaOCOCH_2SH + + CHO\,.\,COONa + NaCl,\ \text{(hastig)} \qquad \text{(IV, ba)},$$

$$NaOCOCH_2S\,.\,CHClCOONa + NaOCOCH_2SNa = = (NaOCOCH_2S)_2 : CHCOONa + NaCl,\ \text{(hastig)}. \qquad \text{(IV, bb)}.$$

Med *triklorättiksyra* anställdes ej mera ingående försök, då den under sådana försöksbetingelser, under vilka tioglykolsyra förbrukades, till betydande del sönderföll i kolsyra och kloroform.

Dessutom undersöktes kinetiskt bl. a. den som sulfidreaktionens, (I), följdreaktion tänkbara *tetinbildningen* enligt:



och det kunde visas, att den senare icke förlöper så hastigt, att den verkar störande vid studiet av den förra.

Enligt allmänna preparativa erfarenheter omsätta sig merkaptaner, särskilt lätt alkalimerkaptider, med halogenföreningar till sulfidföreningar enligt: R'SH + Hlg.R″ = R'SR″ + HHlg., varför de funna reaktionerna enl. I och II ovan visa att under omständigheter omsättningen mellan dessa ämnen kan förlöpa på annat än nyss nämnt sätt.

Hilding Slätis, *Om Hertz'ska vågors ifrågasatta dispersion i fasta kroppar samt den anomala dispersionen i vatten inom våglängdsområdet 52—55 cm* (mit einer deutschsprachlichen Zusammenfassung). Acta Acad. Aboensis, Math. et phys. IX, n:r 4, 1936. Åbo 1936, 173 sid. Disp. i Åbo den 29 febr. 1936. Opponent: professor Karl F. Lindman.

Teoretiskt sett är det icke sannolikt, att fasta dielektrika föranleda dispersion av Hertz'ska vågor. Kännedomen om de fasta kropparnas molekylära struktur är dock fortfarande begränsad, varför molekylära egensvängningar av en frekvens motsvarande det antydda våglängdsområdet och således även en dispersion icke kunna anses uteslutna. De experimentella undersökningarna för frågans besvarande hava hittills varit ytterst otillräckliga och varandra delvis motsägande; författaren har därför velat lämna bidrag till fyllandet av denna lucka. Den experimentella anordningen utgjorde en förbättring av Drudes, Schmidts och Coolidges anordningar; de använda oscillatorerna voro av Rukop-typ och alstrade därför vågor med ytterst liten dämpning. Arbetets resultat kunna i korthet sammanfattas i följande punkter:

1) För dispersions- och absorptionsundersökningar ävensom för bestämningen av speciellt fasta kroppars dielektricitetskonstanter för korta HERTZ'ska vågor utexperimenterades en anordning, vilken särskilt med hänsyn till placeringen och konstruktionen av det annars ömtåliga vakuumtermoelementet visade sig vara mycket lämplig.

2) Den av COOLIDGE och POTAPENKO använda formeln för sambandet mellan en kondensators kapacitet samt våglängden och dimensionerna hos ett av denna kondensator, parallelltrådar och tvenne bryggor sammansatt system ersattes i det fall, att kondensatorn ligger mitt emellan bryggorna, av formler, vilka härleddes med beaktande av de vid övergångsstället mellan parallelltrådarna och kondensatorns tilledningstrådar inträdande reflexionsfenomenen. De av LINNITSCHENKO funna avvikelserna från COOLIDGES formel kunde härigenom förklaras. Genom uppställandet av en empirisk formel beaktades inverkan av kapacitetens olikformiga fördelning på tilledningstrådarna. Sålunda erhölls ett för med föreliggande experimentanordning företagna dispersionsundersökningar nödvändigt teoretiskt underlag.

3) Dielektricitetskonstanterna för ebonit, glas, paraffin, schellack, vax, kalkspat, kvarts och staurolit kunna inom våglängdsområdet 33 cm –2 m förändras med högst 1 %, inom intervallen 13—23 cm med högst 6 % av sitt medelvärde inom intervallen. Inom intervallen 43—73 cm uppmättes kapaciteten hos en glaskondensator för 16, inom intervallen 13—33 cm kapaciteten hos en annan glaskondensator för 38 olika våglängder, utan att något spår av smalare dispersionsområden kunde upptäckas. Fasta kroppar synas således icke föranleda dispersion av HERTZ'ska vågor inom de nämnda våglängdsområdena.

4) Oscillatorns, ohmska motståndets, bryggornas och kondensatorns enskilda andelar i logaritmiska dämpningsdekrementens summa bestämdes för tre olika våglängder. Ur kondensatorns andel i dämpningsdekrementet beräknades absorptionsindex och förlustvinkeln för ebonit, glas, paraffin, kvarts, kalkspat, staurolit och schellack. Absorptionsindex för schellack ökades med avtagande våglängd, varför en för kortare vågor (än de undersökta) inträdande dispersion är sannolik.

5) Några absoluta dielektricitetskonstanter mättes med en härför konstruerad inställbar kondensator. De erhållna värdena, för paraffin 2,22, ebonit 2,83, glas 6,91, äro i god överensstämmelse med av andra författare uppmätta värden inom andra våglängdsområden (för det mesta längre vågor) och giva därför icke något

stöd för möjligheten av en av dessa ämnen föranledd dispersion av HERTZ'ska vågor.

6) Den av WEICHMANN funna, inom våglängdsområdet 52—55 cm inträdande anomala dispersionen i vatten, vilken FRANKENBERGER hade studerat men vid senare försök, i likhet med GIRARD och ABADIE, icke lyckats återfinna, bekräftades såväl genom kapacitets- som genom absorptionsmätningar (de nämnda forskarna hade undersökt brytningsexponentens och absorptionens beroende av våglängden).

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XVII, 1936, h. 1—2.

Ur innehållet. B. LINDBLAD, Vintergatan och stjärnströmningen; Å. WALLENQUIST, Jordens, stjärnornas och världsalltets ålder; J. M. RAMBERG, Världsläran, vetenskapligt kvacksalveri och vidskepelse; B. LINDBLAD, Året och almanackan; E. JOHANSSON, Saturnusringarna och deras stundande försvinnande; Y. ÖHMAN, 200-tumsspegeln och det nya observatoriet i Södra Kalifornien.

Industritidningen Norden. Årg. 1936, h. 1—23.

Ur innehållet. Den svenska sidenindustrien; Den svenska cementindustrien; Billiga civilflygplan; Koppar med hög ledningsförmåga; De värme-elektriska apparaternas utveckling; Moderna värmeisoleringsmaterial; Fotometer för spektralanalys enl. H. G. LUNDEGÅRD; Luminiscensen i ljusteknikens tjänst; Notiser om nya uppfinningar. Patentbeskrivningar.

Naturen. Utgitt av Bergens Museum. Årg. 1936, nr 1—5.

Ur innehållet. T. F. W. BARTH, Stóri Geysir på Island vecket til nytt liv; E. BERNER, Den organiske syntese; B. TRUMPY, Den kosmiske stråling; B. J. BIRKELAND, Temperatur og nedør i Norge.

Skola och Samhälle. Årg. 1936, h. 1—4.

Ur innehållet. H. STRINDBERG, Några erfarenheter av främmande, föråldrad och vilseledande terminologi vid undervisningen i naturvetenskapliga ämnen i skolan; R. ANDRÉASON och J. DIGERFELDT, Individualiserad räkneundervisning; B. GUSTAVER, Kemien i folkskolan, seminariet, realskolan och gymnasiet; H. STRINDBERG, Tre viktiga kapitel i den elementära kemiundervisningen; O. ÅHSTRÖM, Skolbiblioteket och kemiundervisningen.

Föredrag under våren 1936 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. H. Björk; förman i arbetsutskottet fil. mag. E. Berg.

Fysiska Föreningen, ordf. docent O. Lundquist, sekr. amanuens B. Svensson.

Föredrag: prof. N. Bohr, Kausaliteten inom atomfysiken ($^{1}/_{4}$).

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, ordf. rektor P. G. Persson, sekr. fil. lic. B. Svensson.

Vid sammanträde den $^{14}/_{3}$: »Fysikundervisningen i gymnasiets första ring och realskolans avslutningsklass enl. 1933 års läroverksstadga», diskussion inledd av rektor E. Hernqvist, Halmstad. »Lärarutbildningen i kemi», inled. lektor G. Starck, Stockholm, och docent E. Schjånberg, Lund. Skolfilm med fysikaliskt och kemiskt innehåll.

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. amanuens K. E. Thomé.

Föredrag: docent E. Larsson, Om difenyl-cyklopentandiol-karbonsyror ($^{31}/_{1}$); fil. lic. G. Holst, En ljuskänslig redoxjämvikt ($^{31}/_{1}$); fil. lic. E. Eftring, Bestämning av förbränningsvärmen för några klorsubstituerade kolväten ($^{6}/_{3}$); prof. L. Smith, Förevisning av destillationsapparater ($^{6}/_{3}$); docent G. Ljunggren, Erfarenheter från en studieresa i Tyskland angående silikos ($^{27}/_{3}$); Dr. A. Langseth, Köpenhamn, Nogle undersøgelser over deuterobensol ($^{24}/_{4}$); Demonstration av institutionsbygget ($^{22}/_{5}$); Exkursion per buss till Karlshamn, Ivöverken, Simrishamn m. fl. platser den 28—29 maj.

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. doc. S. Wigert, sekr. fil. lic. W. Odhnoff.

Föredrag: fil. lic. A. Pleijel, Något om diofantiska approximationer ($^{25}/_{2}$); docent A. Beurling, Om några lineära medelvärden ($^{6}/_{4}$); prof. R. Nevanlinna, Helsingfors, Om huvudsatsen i teorien för konform avbildning ($^{25}/_{4}$) samt Betraktelser över sannolikhetsbegreppet ($^{23}/_{4}$ i Svenska Aktuarieföreningen); mag. L. Törnqvist, Åbo, Om aritmetiska kedjor ($^{28}/_{5}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. G. Ising, sekr. fil. lic. E. Fredlund.

Föredrag vid sammanträde den 17 febr. tillsammans med Fotografiska Föreningen: prof. A. Odencrants, Fotografien på den internationella kongressen i Paris 1935; dr. E. Elvegård, Om ljuskällors aktivitet; fil. dr. H. Bäckström, Dr Abribats mikrodensimeter utan spalt.

Prof. O. Klein, Atomkärnor och kvantteori (9/3); fil. lic. L. Hulthén, Magnetismen vid låga temperaturer (23/3); fil. dr. L. von Hàmos, Avbildning medelst röntgenstrålar, några nyare resultat (23/3); fil. lic. S. Thunberg, Isotopieffekten i borhydridens och bordeutridens spektra (28/4); fil. lic. G. Ehrensvärd, De bioelektriska fenomenen och metoder för deras studium, med demonstration (28/4); fil. lic. J. Tandberg, Några sidor av den experimentella kärnfysiken (11/5); dr. H. Barth, Leningrad, Om mikrogenetisk strålning (5/6, tillsammans med Svenska föreningen för Mikrobiologi).

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, ordf. rektor B. Söderborg, sekr. fil. dr. S. Åstrand.

Föredrag: prof. G. Aminoff, Demonstration av apparatur för studiet av elektroninterferenser (9/5).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, v. ordf. prof. A. Westgren, sekr. laborator R. Nilsson.

Föredrag: prof. F. Kögl, Utrecht, Ueber pflanzliche Wuchsstoffe (31/3); Kultusminister W. Świętosławski, Varsovie, Sur les nouvelles méthodes de purification des substances liquides très pures (7/5); dr. A. Zmaczyński, Varsovie, Tetrachlorure de carbon consideré comme étalon physico-chimique secondaire (7/5).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. A. Beurling, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Föredrag: fil. lic. H. Bergström, Om några grundbegrepp i den abstrakta algebran (10/3).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Erik Bäcklin, v. ordf. docent Gunnar Kellström.

Föredrag: prof. M. Siegbahn, K. Vetenskapsakademiens nya forskningsinstitut för fysik i Stockholm (7/5).

Kemiska Sällskapet, ordf. docent P. Nylén, sekr. docent A. Fredga.

Föredrag: prof. S. Mattsson, Svenska jordmånstyper (7/2); prof. C. Drucker, Ionengleichgewichte in schwerem Wasser (28/2); prof. O. Svanberg, Bristsjukdomar hos växter och djur (20/3); Besök vid Uppsala jästfabrik (10/6).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

827) *Cosinerna för vinklarna i en triangel förhålla sig som* $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. *Bestäm vinklarna.* *X.*

828) *Sök orten för inflexionspunkterna på kurvan* $y^2(1 + ax^2) = 1 + x^2$, *då a varierar.* *X.*

829) *Till hyperbeln* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ *drages en diameter med vinkelkoefficienten* $k \left(|k| < \frac{b}{a}\right)$ *samt dennas konjugatdiameter. Genom de fyra punkter, där de skära hyperbeln och dess konjugathyperbel, lägges en sådan andragradskurva, att de dragna räta linjerna bli konjugatdiametrar även till denna. Kurvans ekvation?* *Stig Comét.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

830) I en aritmetisk serie är $s_{10} = 1\,010$ och $s_{100} = 100\,100$. Bestäm s_{1000}.

Svar: 10 001 000.

831) I talföljden 3; 1; 2; 1,5; 1,75 ... är varje tal från och med det tredje aritmetiska mediet till de två närmast föregående. Bestäm det gränsvärde, till vilket termerna närma sig.

Svar: $1\frac{2}{3}$.

832) Lös ekvationen

$$\operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} 3x + 1 = \cos 2x.$$

Svar: $n \,.\, 180°$; $45° + n \,.\, 90°$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 830—831, 833—839 äro insända av *X.*; 832 av *B. E. N.*; 840—844 av *H. T.*; 845 av *C. A. Mebius.*

833) Lös ekvationen

$$\sin 3x \cos {}^3x + \cos 3x \sin {}^3x = 0{,}75.$$

Svar: $22°{,}5 + n \cdot 90°$.

834) I ett parallelltrapets med de parallella sidorna 2 cm och 3 cm och höjden 5 cm dragas de båda diagonalerna. Beräkna ytorna av de fyra deltrianglarna var för sig.

Svar: 2 cm²; 3 cm²; 3 cm² och 4,5 cm².

835) Sidorna i en triangel äro 4 cm, 5 cm och 7 cm. Beräkna avståndet mellan den inskrivna cirkelns medelpunkt och medelpunkten i den vid minsta sidan vidskrivna cirkeln.

Svar: $\sqrt{17{,}5}$.

836) I en cirkel med 35 cm diameter drages en 21 cm lång korda AB. Genom ena ändpunkten A drages en tangent till cirkeln och genom den andra B en diameter, vars förlängning skär tangenten i C. Beräkna stycket AC.

Svar: 60 cm.

837) I triangeln ABC dragas bissektriserna till vinklarna B och C. De råka motstående sidor i B_1 och C_1 samt varandra i O. Beräkna vinkeln A, då $AB_1 \cdot AC_1 = \overline{AO}^2$.

Svar: 90°.

838) Triangeln ABC har hörnet A i punkten (2; 3). Bissektriserna till B och C utgöras av linjerna $y = -x$ och $y = 0$ resp. Bestäm koordinaterna för B och C.

Svar: För B äro de $(3\frac{1}{4}; -3\frac{1}{4})$; för C $(-13; 0)$.

839) Beräkna vinkeln mellan två plan genom samma hörn i en regelbunden tetraeder, vilka vardera dela två kantlinjer mitt itu.

Svar: 62°,97.

840) En snickare ville av en rektangulär träskiva tillverka åtta stycken sinsemellan lika rektanglar, längre än den ursprungliga. Om han gjorde dem 12 dm smalare än den ursprungliga skivan, felades det honom 78 dm²; om han försökte göra dem ännu 1 dm både smalare och kortare, fick han 74 dm² över. Bestäm den ursprungliga skivans mått, om de förutsättas vara hela tal.

Svar: 14 och 15 dm.

841) Två tresiffriga hela tal ge vid division med varandra 5 till kvot. Om den andra siffran i det ena och den tredje siffran

i det andra talet strykas, blir kvoten också 5. Vilka äro de möjliga hela talen om a) alla siffror äro olika b) båda talen äro delbara med 9 och summan av alla sex siffrorna 27?

Svar: a) 685 och 137; 865 och 173; 640 och 128; 730 och 146; 820 och 164; 920 och 184; 930 och 186; b) 585 och 117; 675 och 135; 765 och 153; 855 och 171.

842) Ett fyrsiffrigt tal är 1 269 enheter mindre än det tal, som skrives med samma siffror i omvänd ordning. Summan av kvadraterna på de tal, som bildas av de två yttersta, resp. de båda mellersta siffrorna i ursprunglig ordning är 300 enheter större än summan av kvadraterna på de tal, som bildas av varannan siffra. Bestäm talet, om det är delbart med 7.

Svar: 2 583.

843) En gosse hade ordnat sina stenkulor i tre högar. De två första högarna innehålla tillsammans 7 kulor a) mer b) mindre än den tredje. Sedan han flyttat över från den andra till den tredje högen lika många kulor som den första högen innehåller, befinnes det att dubbla kvadraten på den andra högens antal överskjuter produkten av första och tredje högens antal med 293. Hur många kulor fanns från början i varje hög?

Svar: a) Antalen äro i ordning 3, 16 och 12 eller 65, 162 och 220; b) Antalen äro i ordning 51, 130 och 188 eller 577, 1 444 och 2 028.

844) Personalen på fyra olika kontor, tillsammans 30 personer, gjorde en insamling. Var och en på de tre första kontoren lämnade resp. 2 kr, 3,50 kr och 3 kr, men på det fjärde lämnade den första 1 kr och av de övriga var och en 1 kr mer än den föregående. Tillsammans inbragte insamlingen 123 kr. På det första kontoret fanns 2 personer mer än 4 gånger antalet på det andra. Hur många personer fanns det på varje kontor?

Svar: I ordning 10, 2, 6 och 12 personer.

845) I en cirkel med radien r äro inskrivna fyrhörningar, vilkas sidor hava samma mätetal a, b, c, d, men sidornas ordningsföljd är olika och vilken som helst. Dessa figurer hava lika stora ytor y. Av diagonalerna äro högst tre olika, e, f, g.

Visa dessutom, att

$$4ry = efg$$

och att

$$e^2 = \frac{(ac + bd)\ (ad + bc)}{ab + cd}.$$

Liknande uttryck gälla för f^2 och g^2.

Lösningar till uppg. 785—787.

785) *Lös ekvationssystemet*

$$\left.\begin{aligned} xy &= z^2 + z \\ xz &= y^2 + y \\ yz &= x^2 + x \end{aligned}\right\}.$$

C. H.

Genom subtraktion erhålles $y^2 - z^2 + y - z = -x(y - z)$, varav $y - z = 0$ och $x + y + z = -1$ (1). Genom multiplikation erhålles $x^2y^2z^2 = xyz(x+1)(y+1)(z+1)$, varav $xyz = 0$ och $xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 0$ (2). Av (1) och (2) fås $xy + xz + yz = 0$. De obekanta äro alltså dels alla $= 0$, dels rötter till ekvationen $t^3 + t^2 + c = 0$, där c är en godtycklig konstant. Dessa lösningar kunna utskrivas enligt Cardans formel, men då de höra till systemet $x + y + z = -1$, $xy + xz + yz = 0$, som betyder en cirkel i rummet, kunna de givas under någon godtycklig parameterform för denna cirkel t. ex.

$$x = \frac{2qr}{p^2 + q^2 + r^2}, \quad y = \frac{2pr}{p^2 + q^2 + r^2}, \quad z = \frac{2pq}{p^2 + q^2 + r^2},$$

där $p + q + r = 0$. För $p = q = 1$ och $r = -2$ fås speciellt $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$ och $z = \frac{1}{3}$. Systemet är sålunda underbestämt.

X.

Även löst av *B-r, S. L.* och *C. E. Fröberg.*

786) *Vilken blir koefficienten för den term, som innehåller* x^{n-1}, *när divisionen* $(1 - 2x)^n : (1 - x)^2$ *utföres efter stigande digniteter? (n ett positivt helt tal).* *X.*

Koefficienten för den term, som innehåller x^{n-1} ändras ej, om man utbyter täljaren mot $\tau(x) = (1 - 2x)^n + \beta x^n + \alpha x^{n+1}$, väljer α och β så, att divisionen går jämnt upp samt verkställer divisionen efter *fallande* digniteter i stället. Den sökta koefficienten blir då α.

Villkoret för att divisionen skall gå jämnt upp är

$$\tau(1) = (-1)^n + \beta + \alpha = 0,$$
$$\tau'(1) = 2n(-1)^n + n\beta + (n+1)\alpha = 0,$$

varav svaret $\alpha = (-1)^{n-1} \cdot n$.

X.

Även löst av *B-r* och *S. L.*

787) *Visa, att om* r_1, r_2, r_3 *och* r_4 *äro radier i fyra cirklar, av vilka var och en tangerar de tre övriga, så är under förutsättning att radien räknas negativ för en cirkel, som tangeras innantill av de tre övriga*

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2-2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2=0.$$

Stig Comét.

Kalla cirklarna c_1, c_2, c_3 och c_4 samt deras medelpunkter resp. O_1, O_2, O_3 och O_4. Låt j, k, l, m vara en godtycklig permutation av talen 1, 2, 3, 4. Tangeringspunkten mellan c_j och c_k kallas Q_{jk} eller Q_{kj}. De tangenter, som kunna dragas genom Q_{jk}, Q_{kl} och Q_{jl}, råkas i en punkt, P_m. Man har

$$O_jQ_{jk}=O_jQ_{jl}=O_jQ_{jm}=r_j \quad (\text{event. } -r_j).$$

Vidare sättes

$$P_jQ_{kl}=P_jQ_{lm}=P_jQ_{km}=\rho_j \ (\text{event. } -\rho_j);$$

$$\frac{1}{r_j}=t_j; \quad \frac{1}{\rho_j}=\tau_j;$$

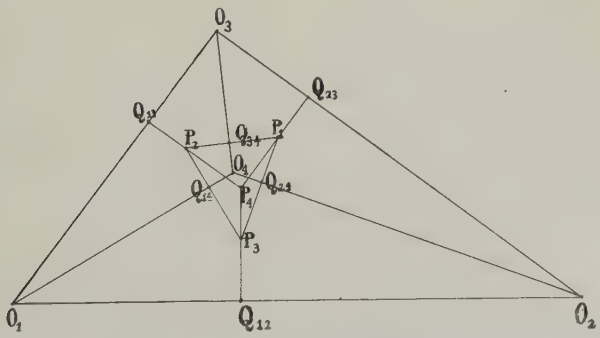
$$\sum_{j=1}^{4} t_j=a; \quad \sum_{j=1}^{4}\tau_j=\alpha; \quad \sum_{j,\,k=1;\,j<k}^{4} t_jt_k=b; \quad \sum_{j,\,k=1;\,j<k}^{4}\tau_j\tau_k=\beta. \tag{1}$$

Emedan vinklarna vid Q_{jk} äro räta, kan man inskriva (vidskriva) cirklar på följande sätt: I $\Delta\, O_kO_lO_m$ inskrives[1] en cirkel (γ_j) med medelpunkt i P_j och radie $=\rho_j$. Enligt Herons formel är då

$$\rho_j=\pm\sqrt{\frac{r_kr_lr_m}{r_k+r_l+r_m}}.$$

Alltså

$$\tau_j^2=t_kt_l+t_lt_m+t_mt_k. \tag{2}$$



[1] Resp. vidskrives. Då en cirkel vidskrives, framkomma under rotmärket två minustecken. Detta kan undvikas, om man räknar r_j (resp. ρ_j) negativt, då c_j (γ_j) tangeras innantill av c_k, c_l och c_m (resp. γ_k, γ_l och γ_m).

I $\Delta P_k P_l P_m$ inskrives[1] en cirkel (c_j) med medelpunkt i O_j och radie $= r_j$. Enligt Herons formel p. s. s.

$$t_j^2 = \tau_k\tau_l + \tau_l\tau_m + \tau_m\tau_k. \tag{2'}$$

Med användning av (1) ger (2):

$$\tau_j^2 = b - t_j(t_k + t_l + t_m) = b - t_j(a - t_j),$$

eller med utelämnande av indices:

$$\tau^2 = b - at + t^2. \tag{3}$$

P. s. s. ur (2'):

$$t^2 = \beta \quad \alpha\tau + \tau^2. \tag{3'}$$

(3) och (3') äro varandras inversa transformationer.

Eliminera τ. Av (3') erhålles:

$$\alpha^2\tau^2 = (\beta + \tau^2 - t^2)^2$$

och enligt (3):

$$\because \alpha^2(b - at + t^2) = (\beta + b - at)^2. \tag{4}$$

Denna likhet, som är av andra graden, skall gälla för fyra t-värden $(t_1, \ldots, t_4)$. Om av dessa minst tre äro varandra olika, så följer, att (4) måste gälla identiskt. På grund av kontinuitet måste (4) då emellertid alltid vara en identitet. Genom att identifiera koefficienterna för t^2, t och t^0 resp. finner man:

$$\alpha^2 = a^2 \tag{5}$$

$$\alpha^2 a = 2a(b + \beta) \tag{5'}$$

$$\alpha^2 b = (b + \beta)^2 \tag{5''}$$

Av (5') och (5''):

$$2b = b + \beta; \quad \because b = \beta$$

d. v. s. enl. (5) och (5'):

$$a^2 = \alpha^2 = 4b = 4\beta.$$

Därmed är satsen bevisad, ty $a^2 = 4b$ betyder enl. (1)

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} \quad \frac{2}{r_1 r_2} - \frac{2}{r_1 r_3} - \frac{2}{r_1 r_4} - \frac{2}{r_2 r_3} - \frac{2}{r_2 r_4} - \frac{2}{r_3 r_4} = 0.$$

Men man har samtidigt visat mera: t. ex. att tangenternas längder, ρ_j, satisfiera samma relation, $\alpha^2 = 4\beta$, och t. o. m. att mellan talen r_j och talen ρ_j råder full symmetri.

Stig Comét.

Även löst av *S. L.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Mars—april 1936.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. I en triangel är en vinkel 41°,26, en närliggande sida 3,4 dm och motstående sida 2,9 dm. Beräkna de övriga vinklarna.
2. Två sidor i en triangel äro 3 cm och 5 cm och mellanliggande vinkel 40°,4. En ny triangel bildas med två sidor lika stora som de nämnda och den tredje sidan dubbelt så stor som den tredje i den förra triangeln. Beräkna vinkeln mellan de kända sidorna i den nya triangeln.
3. På en cirkels periferi har man tagit två punkter A och B så, att *bågen* AB är lika med cirkelns diameter. Beräkna förhållandet mellan de båda segment, i vilka *kordan* AB delar cirkeln. Approximationen $\pi = 3{,}14$ är tillåten.
4. Lös ekvationssystemet

$$\frac{5x+2y}{3x+2y} \quad \frac{1}{6x+4y} = \frac{15x^2-4y(x+y-1)}{9x^2-4y^2}; \quad \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^2-y)}{\frac{1}{3}x^2+2} = \frac{1}{4}.$$

5. En person A insätter i en bank under 10 år vid varje års början 1 000 kronor. Samtidigt börjar en annan person B vid varje års början göra lika stora insättningar, dock endast under 5 år. Hur stora skola dessa vara, om B vill ha lika stort tillgodohavande som A vid den tidpunkt, då A slutat sina insättningar? Räntefoten antages vara 4 %.
6. I en triangel äro sidorna 13, 20 och 21 dm. Beräkna avstånden från medianernas skärningspunkt till sidorna.
7. I en cirkel med 20 cm radie är en fyrhörning $ABCD$ inskriven. Sidorna AB och BC äro lika stora och upptaga hälften så stora medelpunktsvinklar som de inbördes lika stora sidorna CD och DA. Angiv läget av medelpunkten i den cirkel, som kan inskrivas i fyrhörningen, och beräkna cirkelns radie.

8. En halvcirkel med radien 2 cm har sin medelpunkt O på sidan AB i triangeln ABC och tangerar de båda övriga sidorna. AO är 2,9 cm och BO är 2,5 cm. Beräkna triangelns sidor.

Resultat: **1.** 50°,64 och 88°,10 eller 129°,36 och 9°,38. **2.** 110°,73. **3.** 0,2101. **4.** $x_1 = \sqrt{7} - 1$; $y_1 = -\frac{\sqrt{7}-1}{2}$; $x_2 = -(\sqrt{7}+1)$; $y_2 = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$. **5.** 1822 kr. **6.** 4 dm; 4,2 dm och $6\frac{6}{13}$ dm. **7.** Medelpunkten ligger på BD, $20(\sqrt{3}-1) = 14{,}64$ cm från B. Radien är $10(3 - \sqrt{3}) = 12{,}68$ cm. **8.** $AB = 5{,}4$ cm; $BC = 3\frac{3}{4}$ cm; $AC = 4\frac{7}{20}$ cm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

a) *1933 års undervisningsplan.*

1. Konstruera grafiskt de genom ekvationerna

$$y = x + 1,\ y = -x + 3,\ 5y = x - 3$$

definierade linjerna och beräkna ytan av den triangel, som begränsas av dessa linjer.

2. För att bestämma höjden av en bergstopp P har man uppmätt en baslinje $AB = 198$ m i sådan riktning, att vertikalplanet genom AB går genom P. Baslinjen är ej horisontell, utan ändpunkten B, som är närmast P, ligger 8,4 m högre än A. Syftlinjerna AP och BP bilda vinklarna 25°,7 och 31°,8 med horisontalplanet. Bestäm höjdskillnaden mellan P och B.

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7; \\ xy + yz &= 12xz; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 4\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. I kvadraten $ABCD$, vars sida är a, inskrives en kvadrat $A_1B_1C_1D_1$ med A_1 i mittpunkten av AB, B_1 i mittpunkten av BC o. s. v. I $A_1B_1C_1D_1$ inskrives på samma sätt en ny kvadrat $A_2B_2C_2D_2$ med A_2 i mittpunkten av A_1B_1 o. s. v. I $A_2B_2C_2D_2$ inskrives på samma sätt kvadraten $A_3B_3C_3D_3$ o. s. v. i oändlighet. Den spiralformigt brutna linjen $AA_2A_4A_6 \ldots$ drages, och därigenom bildas en oändlig följd av trianglar AA_1A_2, $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$, ... Hur stor är summan av alla dessa trianglars ytor?

5. I en rätvinklig triangel är avståndet mellan medelpunkterna i den inskrivna och den omskrivna cirkeln lika med diametern

i den inskrivna cirkeln. Sök förhållandet mellan radierna i de nämnda cirklarna.

6. Koordinaterna för en triangels hörn äro (1; 3), (—1; 1) och (2; 1). Bestäm koordinaterna för en punkt på räta linjen $x + y = 0$, så belägen att summan av kvadraterna på dess avstånd till triangelns sidor (eller deras förlängningar) blir så liten som möjligt. Angiv även minimivärdet.

7. Det finnes två normaler till kurvan

$$9y = x^4 - 18x^2 + 3x,$$

som äro parallella med kurvans normal i origo. Bestäm dessa normalers ekvationer.

8. Från en punkt, som ligger lodrätt över medelpunkten till ett klot med radien r, lägges en tangentkon till klotet. Punktens avstånd från klotets medelpunkt är a. Volymen mellan klotets övre yta och konens mantelyta delas i två delar av det plan, som tangerar klotet i dess högsta punkt. Visa, att delarnas volymer förhålla sig till varandra som $a : r$.

9. Visa, att i varje triangel ABC är

$$a \sin A - b \sin B = c \sin (A - B),$$

om a, b och c äro motstående sidor till resp. A, B och C.

Resultat: **1**. 6 ytenheter. **2**. 388 m; (48,9 m). **3**. $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $y_1 = 3$, $z_1 = 2 - \sqrt{3}$; $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $y_2 = 3$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}$. **4**. $\frac{a^2}{12}$. **5**. $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Triangeln behöver ej vara rätvinklig, vilket framgår av att i *varje* triangel avståndet mellan de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter $= \sqrt{R^2 - 2Rr}$. Bevis för denna sats återfinnes i denna Tidskr. årg. *8*, sid. 56. **6**. $x = -\frac{5}{8}$ och $y = \frac{5}{8}$; minimiv. $= 6\frac{3}{4}$. **7**. $3x + y - 1 = 0$ och $3x + y + 19 = 0$.

b) *1928 års undervisningsplan.*

1—5, 8 och 9. Samma uppgifter som 1—5, 8 och 9 enligt 1933 års undervisningsplan (se ovan).

6. I en viss ellips är en kvadrat inskriven. Omkring ellipsen är omskriven en fyrhörning, vars sidor tangera ellipsen i kvadratens hörn och vars yta är fyra gånger så stor som kvadratens. Hur stor är ellipsens excentricitet?

7. Tangenten och normalen i punkten P på parabeln $y^2 = 4ax$ råka parabelns styrlinje i punkterna T och N resp. Bestäm punkten P så, att avståndet TN får sitt minsta värde.

Resultat: 6. $\sqrt{\sqrt{8}-2} = 0{,}9102$. 7. $x = \frac{a}{3}$; $y = \pm \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemets text, hämtas ur formelsamlingen, sid. 16.

1. På en smal, horisontell axel är en homogen cirkulär skiva anbragt. Skivan är av stål (spec. vikt 7,7), har radien 10,0 cm och tjockleken 1,5 cm. Dess plan är vinkelrätt mot axeln. Avståndet från axeln till skivans medelpunkt är 7,5 cm. Skivans medelpunkt befinner sig från början rätt under axeln. Beräkna det arbete, som åtgår för att vrida skivan 100°. Friktionen försummas.
2. På ett lutande plan ligga två kroppar, vardera vägande 3 kg, förbundna med varandra medelst ett snöre. Snöret är parallellt med lutande planet och bildar liksom detta 30° vinkel med horisontalplanet. Den nedre kroppens friktionskoefficient i förhållande till planet är 0,15, den övres 0,30. Den övre kroppen fasthålles först. När den släppes, komma båda kropparna i rörelse med samma acceleration. Huru stor är spänningen i snöret under rörelsen?
3. Ett lodrätt stående glasrör är upptill slutet och utmynnar nedtill i ett större kärl med kvicksilver (Torricellis rör). Då kvicksilvret står 760 mm högre inuti röret än utanför detsamma, finnes ovanför kvicksilvret ett tomrum av 10 cm längd. När nu en liten luftmängd släpptes in i tomrummet, minskades kvicksilverpelaren till 700 mm. Röret fick därefter stå en tid i oförändrad ställning. Sedan avlästes ånyo kvicksilverpelarens längd och befanns nu vara 705 mm. Huru stort var då barometerståndet? Temperaturen hade ej ändrats nämnvärt. Rörets inre vidd var överallt lika.
4. I en viss förbränningsmotor användes ett bränsle, som vid förbränning utvecklar 10 800 kcal/kg. Vid arbetsprocessen i motorns cylindrar omsättes endast 25 % av den vid förbränningen frigjorda energien till mekaniskt arbete. Till följd av friktionsförluster inuti motorn kunna endast 95 % härav uttagas såsom nyttigt arbete från motoraxeln. Huru stor är bränsleförbruk-

ningen per timme, om från motoraxeln uttages en effekt av 100 hästkrafter?

5. I ett hål i väggen av en i vatten nedsänkt dykarklocka är en plankonvex glaslins vattentätt infattad med den konvexa ytan vänd mot klockans luftfyllda inre. En person, som befinner sig inuti klockan, ser ut genom linsen och använder därvid ögat på samma sätt som när man observerar mycket avlägsna föremål. Huru stor skall den krökta linsytans radie vara, för att han då skall tydligt se ett föremål, som befinner sig ute i vattnet på 1 meters avstånd från linsen? Linsens tjocklek må försummas.
6. I ena gaveln av ett rektangulärt kärl är ett gitter av glas infogat med fårorna vända inåt kärlet. Kärlets andra gavel utgöres av en mattskiva. Avståndet mellan gittret och mattskivan är 100 cm. Ljuset från en fin springa, som är belyst med natriumljus, samlas med en lins, passerar genom gittret och alstrar mitt på mattskivan en gul linje, symmetriskt omgiven av andra gula linjer. Avståndet mellan de båda linjer, en på vardera sidan om centrallinjen, som tillhöra andra ordnings spektra, är 8,6 cm. Om kärlet fylles med en viss vätska, blir avståndet mellan de båda linjer, som tillhöra tredje ordnings spektra, 9,4 cm. Våglängden för natriumljus är i luft 5 890 ångström. Beräkna dess våglängd i vätskan. De strålar, som giva upphov till en viss linje, kunna med tillräcklig noggrannhet anses vara parallella.
7. Fyra likadana trådar, vardera med 4 ohms motstånd, äro med ändpunkterna hopfogade så, att de bilda en kvadrat *ABCD*. Medelst korta, grova koppartrådar förenas *A* med den positiva och *D* med den negativa polen av ett batteri, vars elektromotoriska kraft är 4 volt och inre motstånd 0,5 ohm. Därpå förbindes punkten *A* med jorden. Beräkna potentialen i *C*.
8. Inuti en solenoid, som är uppställd i den magnetiska meridianen med axeln horisontell, befinner sig en liten kompassnål. Då solenoiden är strömlös, utför nålen 40 svängningar per minut. Sändes genom solenoiden en ström av 1 ampere i sådan riktning, att den på översidan går (approximativt) i riktning väst-ost, blir nålens svängningstal 50 per minut. Vad blir nålens svängningstal, om strömmens riktning omkastas och dess styrka ökas till 2 ampere? Det i solenoiden av strömmen alstrade fältet är proportionellt med strömstyrkan.

Resultat: **1.** 0,320 kgm. **2.** 0,195 kgf. **3.** 766,9 mm. **4.** 24,7 kg. **5.** 37,5 cm. **6.** 4290 Å. E. **7.** $-2\frac{2}{7}$ volt. **8.** $\sqrt{200} = 14{,}14$ svängningar per minut.

Matematiska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen.

Maj 1936.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

(1928 års undervisningsplan).

1. I en cirkel med radien $= 6$ cm inskrives en triangel ABC med $AB = 9$ cm och $BC = 11$ cm. Beräkna längden av AC.
2. Ur en rätvinklig parallellepiped, vars kantlinjer äro resp. 4, 5 och 7 cm, avskäres en trekantig pyramid genom ett plan, lagt genom tre av parallellepipedens hörn. Angiv denna pyramids volym och dess fyra höjder.
3. Lös ekvationssystemet $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x + \operatorname{cot} y = -\frac{1}{4} \\ \operatorname{cot} x + \operatorname{tg} y = 2 \end{array}\right\}$.
4. En sfär med radien $= r$ är given. Man tänker sig en del av sfärens volym bortskuren förmedelst en sfärisk yta med medelpunkten på den givna sfärens yta och med radien $= x$. Huru skall x väljas, för att den återstående delen av den givna sfären må få så stor begränsningsyta som möjligt?
5. Ett amorteringslån togs mot 5 % ränta på ränta och skulle gäldas på 40 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Omedelbart sedan den 20:e annuiteten inbetalats, kunde man emellertid konvertera resten av lånet till ett nytt mot 4 %. Annuiteten bibehölls oförändrad, frånsett att det sista gången betalades en mindre summa. När var lånet fullt inbetalat?
6. Upprita en kurva över funktionen $y = x^3 - 3x$. Från punkten $(1\frac{1}{3}; -4)$ dragas tangenter till kurvan. Var tangera dessa? Sök även tangenternas ekvationer och den vinkel, de bilda med varandra.
7. Från en godtycklig punkt Q på transversalaxeln till en hyperbel drages en tangent till kurvan. Tangeringspunkten P sammanbindes med transversalaxelns ändpunkter A och A_1, och sammanbindningslinjerna utdragas. Genom Q drages en linje parallellt med konjugataxeln till hyperbeln, och den skär PA i B och PA_1 i C. Visa, att transversalaxeln delar BC mitt itu.
8. Parablerna $y^2 = 4ax - b$ och $y^2 = -4bx + a$ hava gemensam brännpunkt. Avståndet mellan deras vertices är $= \frac{6}{5}$. Bestäm a och b under förutsättning, att båda äro positiva tal.

9. Från en punkt P på en given cirkel äro dragna två lika långa kordor PA och PB, som bilda 60° vinkel med varandra. Man söker en tredje korda CD, ej parallell med AB, som skär PA i E och PB i F så, att $CE = FD$ och $EF =$ cirkelns radie. Konstruera CD, och beräkna dess längd, uttryckt i cirkelns radie.

Resultat: 1. 10,87 cm eller 3,68 cm. 2. Volymen är $23\frac{1}{3}$ cm³ och höjderna 4 cm, 5 cm, 7 cm och $\frac{140}{\sqrt{2409}} = 2{,}852$ cm. 3. $\frac{x \mid 14°{,}04 \mid}{y \mid 116°{,}57 \mid}$ $\frac{153°{,}43 \mid + n \cdot 180°}{75°{,}96 \mid + m \cdot 180°}$. 4. $\frac{2r}{3}$ 5. 18 år efter konverteringen. 6. I punkterna $(0\,;0)$ och $(2\,;2)$. Tangenternas ekv. äro $3x + y = 0$ och $9x - y - 16 = 0$; vinkeln mellan dem 24°,77. 8. $a = 1$; $b = 0{,}2$. 9. $\frac{r\sqrt{33}}{3}$.

Realexamen V. T. 1936.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{2x + 1{,}5}{1\frac{1}{7}x - 2} - \frac{7(x - 0{,}5)}{4x - 7} = \frac{3}{4}.$$

2. En strandägare utplanterar 30 tjog små kräftor, som genom hushållningssällskapet erhållits till ett pris av 50 öre per tjog. Hur många tjog utvuxna kräftor skall han minst fiska vid sin strand 2 år senare, då priset står i 1,50 kr. per tjog, för att återfå sitt kapital jämte 20 % därav i ersättning för sitt besvär och därjämte 5 % enkel ränta på sitt utlägg?
3. Ett fabriksbolag, vars aktier lyda på 60 kronor, beräknas giva en årlig utdelning av 3 kr. 50 öre per aktie. Hur mycket större årlig inkomst får man, om man till 110 % kurs köper 30 sådana aktier i stället för att hava penningarna insatta på en sparbank, som ger $2\,^3/_4$ % ränta?
4. Två cirklar, den ena med 13 cm och den andra med 15 cm radie skära varandra så, att den gemensamma kordan blir 24 cm. Hur stort är avståndet mellan cirklarnas medelpunkter?
5. Förenkla uttrycket

$$\frac{\frac{1}{9}a^2b^2 - 4c^2}{a^2b - 6ac}$$

och beräkna dess värde för $a = 1\frac{1}{3}$; $b = 4\frac{1}{2}$; $c = -\frac{5}{6}$.

6. Ett snälltåg går från *A* till *B*, 162 km, på 2 t. 15 min. En tid efter tågets avgång startar en flygmaskin från *A*, följer järnvägen till ett flygfält omedelbart utanför stationen i *B* och kommer dit samtidigt med tåget. Om flygmaskinen tillryggalägger 1 km på 20 sekunder, hur långt hade tåget hunnit, då flygmaskinen startade? Tågets hastighet antages vara konstant.
7. En 30 m lång hagtornshäck nedklippes 2 m. Hur mycket större blir då den solbelysta markytan innanför häcken vid en tidpunkt, då solen står 30° över horisonten och dess strålar gå vinkelrätt mot häckens längdriktning?
8. En brunn får sitt vatten från en källa. För att få ett begrepp om källåderns styrka pumpade ägaren vid ett tillfälle under loppet av en halvtimme upp så mycket vatten, att det räckte till att fylla en 12 liters hink 24 gånger. Brunnens övre del begränsades av ett cylindriskt cementrör med 30 tums inre diameter. Vattenytan stod vid pumpningens slut 46 cm längre ned i detta rör än vid början. Hur många liter per minut skulle enligt detta försök källådern tillföra brunnen? 1 fot = 12 tum = 30 cm. $\pi = 3{,}14$.

Resultat: 1. $x = 4\frac{2}{3}$. 2. 13 tjog. 3. 50,55 kr. 4. 14 eller 4 cm. 5. $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. 6. 97,2 km. 7. $60\sqrt{3} = 103{,}9$ m². 8. 2,83 l.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. Ett U-formigt böjt rör är delvis fyllt med vatten. Båda skänklarna äro vertikala och hava samma inre genomskärningsyta. Hur hög oljepelare skall påfyllas i ena skänkeln, för att vattenytan i den andra skall stiga 3,4 cm? Oljans specifika vikt är 0,85.
2. En järnplatta är 3 dm lång, 2 dm bred och 1 cm tjock. Dess specifika vikt är 7,8. Den pressas mot en sträv, vertikal vägg av en kraft, som är vinkelrät mot väggen. Hur stor måste kraften minst vara, för att plattan ej skall glida ned, då friktionskoefficienten mellan plattan och väggen är 0,2?
3. En järnvägsvagn står stilla på ett horisontellt järnvägsspår. En man skjuter på vagnen, som väger 6 ton, med en kraft av 30 kgf. Hur stor är vagnens hastighet, sedan den rört sig 100 m, om hänsyn icke tages till motstånden? Accelerationen vid fritt fall är 9,81 m/sek².
4. I 60 kg vatten av 16° inledes vattenånga av temperaturen 100°, tills vätskan väger 64 kg. Hur hög är då temperaturen? Vattnets ångbildningsvärme är 540.

5. En syrgasbomb, som rymmer 20 liter, innehåller gas med trycket 5,2 kgf/cm² vid 17° temperatur. Hur många liter syrgas av 0° och trycket 1 kgf/cm² har uttagits ur bomben, då trycket i denna sjunkit till 2,3 kgf/cm² vid oförändrad temperatur hos gasen i bomben? Luftens temperaturkoefficient är 1/273.
6. Man har förfärdigat ett motstånd av tre glödlampor, var och en med motståndet 2 200 ohm. Två lampor äro kopplade parallellt med varandra och den tredje i serie med de båda föregående. Huru stort är motståndet?
7. Ett ackumulatorbatteri med elektromotoriska kraften 30 volt och inre motståndet 0,5 ohm skall laddas med en ström på 12 ampère. Ett motstånd kopplas i serie med batteriet och spänningen 220 volt pålägges. Hur stort skall motståndet vara?
8. En elektrisk cigarrtändare användes i genomsnitt 20 sek. för varje tändning och förbrukar då 0,4 ampère vid 220 volts spänning. En ask tändstickor kostar 3 öre och innehåller 30 tändstickor. Hur mycket billigare bliva 1 000 tändningar på det ena sättet än på det andra, då den elektriska energien kostar 24 öre per kilowattimme?

Resultat: **1.** 8 cm. **2.** 23,4 kgf. **3.** $\sqrt{9{,}81} = 3{,}13$ m/sek. **4.** 55°. **5.** 54,6 liter. **6.** 3 300 ohm. **7.** $15\frac{1}{3}$ ohm. **8.** Elektrisk tändning blir 88 öre billigare.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.[1]

1. Visa genom en enkel skiss, hur en vanlig, encylindrig tvåtaktsmotor är anordnad och redogör genom en kort beskrivning för verkningssättet och för hastighetens reglering.

   Nämn de huvudsakliga faktorer, som äro bestämmande för motorns effekt.
2. En vinsch, vars lintrumma är 500 mm i diameter och går med en hastighet av 2 varv per minut, skall kunna lyfta 5 ton. Friktionsförlusterna uppskattas till högst 20 % av den nyttiga lasten. Hur stor motor fordras?
3. Mellan två parallella axlar, vars centrumavstånd ej är fullt bestämt men önskas omkring 350 mm, skall anordnas en kugg-

[1] Tid: 6 tim. Tillåtna hjälpmedel: vissa handböcker och lektionsanteckningar. För betyget godkänd fordras, att minst två av uppgifterna 1—6 och minst en av uppgifterna 7—9 äro nöjaktigt behandlade.

växel med utväxlingsförhållandet 1 : 3 och modul 6. Hur många kuggar får vartdera hjulet, och hur stort blir rätta axelavståndet?

4. I en svarv, vars ledarskruv har 4 gängor per tum, skall svarvas en skruv med 6 gängor per tum. Å spindeln finnes ett kugghjul med 20 kuggar. Hur många kuggar skall kugghjulet på ledarskruven hava, under förutsättning att eventuella mellanhjul ej inverka på utväxlingen?
5. En hydrofor, vars behållare skall ligga i källaren till ett 18 meter högt hus, skall kunna trycka vattnet till sammanlagt 20 meters höjd över behållaren. Denna skall göras av koppar i form av en långsträckt cylinder med 1,2 meter i diameter. Hur tjock bör plåten vara, för att påkänningen skall begränsas till cirka 3 kg per mm^2?
6. Över en 3 meter bred muröppning skall läggas två I-balkar invid varandra, och över balkarna skall komma en jämnt fördelad last uppgående till 15 ton. Vilken balkprofil bör väljas?

---

7. Visa schematiskt genom en enkel skiss, hur en värmeledning enligt varmvattensystemet kan vara anordnad i ett mindre bostadshus, och angiv de olika delarnas tekniska benämningar. Gör en kort beskrivning av verkningssättet.
8. Vilka äro de vanligaste materialen för taktäckning? Angiv några av deras olika egenskaper och dessas betydelse för materialvalet under olika förhållanden.
9. Vilka material kunna komma i fråga till golv i ett badrum? Visa genom en enkel skiss ett dylikt golv med underliggande bjälklag i sektion och utsätt de olika delarnas och materialens benämningar.

Resultat: **2.** 4,2 hkr. **3.** 29 och 87 kuggar giva 348 mm axelavstånd; 30 och 90 kuggar giva 360 mm axelavstånd. **4.** 30 st. kuggar. **5.** 4 mm. **6.** Normalprofil 21, 22 eller 23.

Vinkelns tredelning. II.

Några nya konstruktioner.

Av J. TANDBERG.

Som framgår av det föregående,[1] innebär ett maximalt fel av c:a 15″ hittillsvarande rekord i avseende på noggrannhet. Det är emellertid lätt att nedbringa felet långt under 1″, vilket visas av följande konstruktioner.

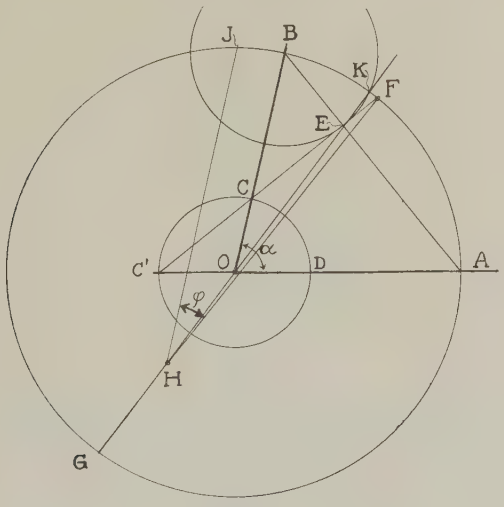


Fig. 8.

1:a metoden (se fig. 8). $\angle AOB = \alpha$. Upprita cirklarna O(OD) och O(OA), där $OA = 3\,OD$. Den mindre cirkeln skär linjen AO i C′ och D. Linjen C′C skär kordan AB i E och den större cirkeln i F. (Härvid blir $BE = \frac{1}{3}\,BA$ och $EF \perp BA$.) Samma cirkel skäres av cirkeln B(BE) i K; KOG är en diameter, H är mittpunkten på radien OG; $HJ \parallel OB$.

[1] Denna tidskr. årg. 18, 1935, sid. 85.

$\sphericalangle JHF = \varphi$ är den sökta vinkeldelen, förbunden med α enligt relationen:

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{648}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^9 + \dots$$

Man kan även undvika att draga JH // OB, om man utdrager BO, tills den skär HF, ty vinkeln mellan dessa båda linjer blir $= \varphi$.

Metoden har ett maximalt fel av 0,942″ vid $\alpha = 90°$. För trubbiga vinklar, där felet skulle bliva större vid en direkt

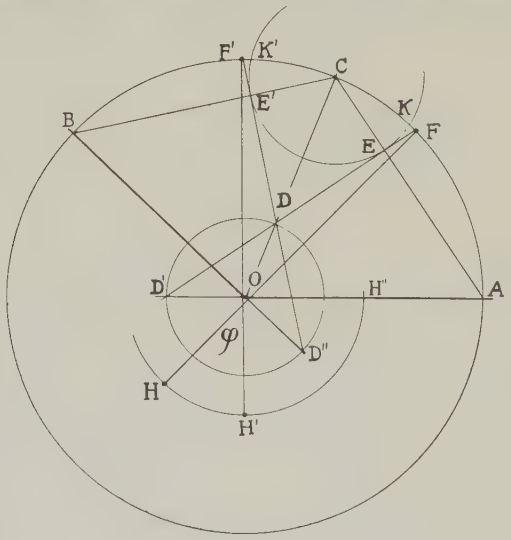


Fig. 9.

delning, delar man i stället supplementvinkeln och får fram $60° - \varphi$, varefter φ lätt konstrueras. Detsamma gäller även för följande metoder.[1] Felet finnes beräknat i tabell 2 för några olika vinklar.

2:a metoden. Genom en enkel utveckling av föregående metod kan man nå större noggrannhet. Se fig. 9. Som förut

[1] I de fall, då felet ökar med vinkeln, kan man givetvis i hög grad minska felet genom att t. ex. dela $90° - \alpha$, när $90° > \alpha > 45°$, och få fram $30° - \varphi$. Vi bortse i det följande från dylika manipulationer.

är $\sphericalangle AOB = \alpha$; $OA = 3\,OD$. Bissektrisen till $\sphericalangle AOB$ skär cirklarna i resp. C och D. Vi få följande vackert symmetriska bild: Linjen D′D skär kordan CA i E och stora cirkeln i F. Motsvarande gäller för D″DE′F′. Cirkeln C(CE) skär O(OA) i K och K′. Vi kunna lämpligen även upprita en cirkel O(OH″), där H″ är mittpunkten av OA. Denna »halveringscirkel» har skärningspunkten H med linjen KOH och H′ med K′OH′ (linjerna KOH och K′OH′ icke utritade på

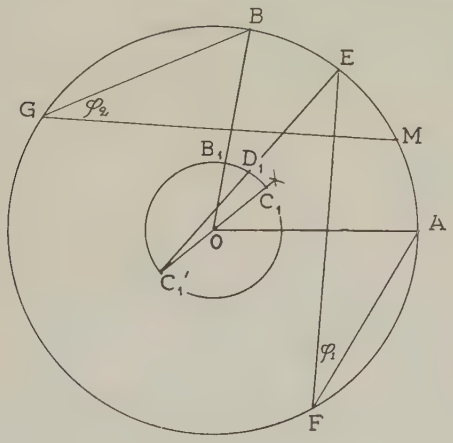


Fig. 10.

fig.). Linjerna FH och F′H′ bilda med varandra vinkeln φ, som bestämmes av relationen:

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2^{11} \cdot 3^4}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^9 + C\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{15} + \ldots$$

Denna metod är c:a 256 gånger så noggrann som föregående och har ett maximalt fel av $0{,}0037''$ vid $\alpha = 90°$ Se tab. 2.

3:e metoden. Denna metod är intressant, enär den lätt låter sig utföras med hjälp av linjalkonstruktioner. Man begagnar två fasta, koncentriska cirklar med radierna 1 och 3 (se fig. 10) som basis för dessa konstruktioner. $\sphericalangle AOB = \alpha$,

bissektrisen[1] skär den mindre cirkeln i C_1 och C_1'; D_1 är mittpunkten på bågen B_1C_1; $C_1'D_1$ skär den större cirkeln i E.

1:a varianten: Varje spetsig periferivinkel, som står på bågen AE, är $= \varphi_1$. Alltså, med F som *godtycklig* punkt på den större cirkeln, fås $\measuredangle AFE = \varphi_1$.

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2^8 \cdot 3}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + C\left(\frac{\alpha}{3}\right)^7 + \dots$$

Maximala felet $\varepsilon_1 = -38{,}5''$.

2:a varianten (se fig. 10): Beteckningar som förut; M är mittpunkten på bågen AE; G är en godtycklig punkt på den större cirkeln och (den spetsiga) $\measuredangle BGM = \varphi_2 =$

$$= \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2^9 \cdot 3}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \dots$$

Max. felet $\varepsilon_2 = 19{,}3''$.

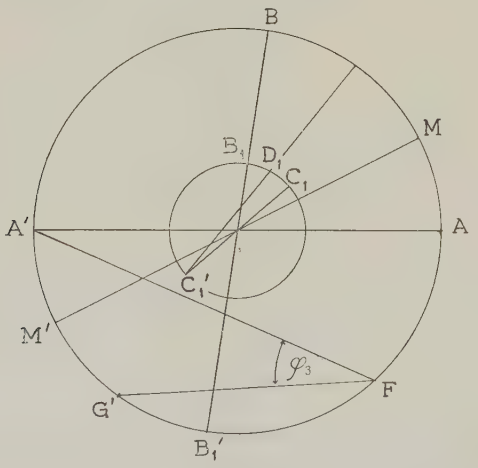


Fig. 11.

3:e varianten (se fig. 11): Konstruktionen är som hos föregående t. o. m. punkten M; MM′ är en diameter hos

[1] Bissektrisen fås genom en enkel linjalkonstruktion, t. ex. om man först korsvis med varandra förbinder vinkelbenens och cirklarnas skärningspunkter. Det är teoretiskt möjligt att helt undvara den ena cirkeln, men konstruktionen kompliceras avsevärt härigenom.

den större cirkeln och G′ är mittpunkten på bågen M′B′$_1$ $\measuredangle$ A′FG′ $= \varphi_3$, där F är en godtycklig punkt på cirkeln, ty varje spetsig periferivinkel på bågen A′G′ är $= \varphi_3 = \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2^{10} \cdot 3}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \ldots$; max. felet $\varepsilon_3 = -9{,}63''$ (se tab. 2).

Denna 3:e metod kan sägas vara byggd på följande enkla princip: Antag att vi funnit en första approximation BOE (fig. 10) $= \frac{\alpha}{3} + \delta$. Vi kunna då dela bågen AE mittitu i M; $\left(\text{MOA} = \varphi_1 = \frac{\alpha}{3} - \frac{\delta}{2}\right)$. Vidare BM mitt itu i M$_1$ $\left(\text{M}_1 \text{ ej utritad men BOM}_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha}{3} + \frac{\delta}{4}\right)$. Vidare M$_1$A mitt itu i M$_2$ $\left(\text{M}_2 \text{ ej utritad men AOM}_2 = \varphi_3 = \frac{\alpha}{3} - \frac{\delta}{8}\right)$ o. s. v. Allmänt gäller för 3:e metoden, att $\varphi_n = \frac{1}{2}(\alpha - \varphi_{n-1})$ och att

$$\varphi_n = \frac{\alpha}{3} + \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{\alpha}{24} - \frac{(-1)^n}{2^n} \arcsin\left(\frac{1}{3}\sin\frac{\alpha}{8}\right).$$

En annan allmän princip, som får tillämpning i det följande, illustreras av fig. 12. Antag att vi på något sätt funnit en första approximation AOD $= \beta = \frac{\alpha}{3} + \delta$, där δ är felet hos β. Den bättre approximation φ, som vi söka, får felet ε, så att $\varphi = \frac{\alpha}{3} + \varepsilon$. Vi konstruera φ på följande enkla sätt: Hos cirklarna O(OC) och O(OA) förhålla sig radierna OC : OA = 1 : 2. Radien OD skär den mindre cirkeln i D$_1$ och (utdragen) den större i D$_2$. På den mindre cirkeln avsätta vi bågen D$_1$E = CD$_1$ = β och på den större halvera vi bågen D$_2$B$_2$ med punkten H. EH bildar med DD$_2$ den sökta vinkeln φ. — Vi ha egentligen blott konstruerat en triangel (EOH), där ena sidan (OH) är dubbelt så lång som den andra (OE) och $\measuredangle$ OEH approx. dubbelt så stor som $\measuredangle$ EHO, d. v. s. $\beta - \varphi = 2\left(\varphi - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ eller $\varphi = \frac{\alpha}{3}$ (approx.).

Det exakta sambandet fås enl. sinussatsen: $\sin(\beta - \varphi) = 2 \sin\left(\varphi - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$, vilket kan ersättas med $\sin(\delta - \varepsilon) = 2 \sin\left(\frac{\delta}{2} + \varepsilon\right)$, varav: $\varepsilon = \delta - \operatorname{arctg} \frac{2 \sin \frac{3\delta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{3}{2}\delta}$.

För små δ blir $\varepsilon = -\frac{1}{24}\delta^3 - \frac{1}{2^7}\delta^5 \ldots$ (approx.).

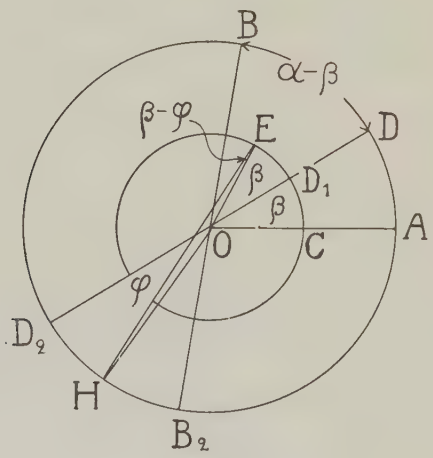


Fig. 12.

Det är anmärkningsvärt, att man får ett gott värde på φ, även om β är dåligt, ja, låta vi t. ex. β vara $= 0$, när $\alpha = 90^\circ$, alltså felet $|\delta| = 30^\circ$, ett groteskt ytterlighetsvärde, blir felet $|\varepsilon|$ dock blott $0{,}36^\circ$. För $\delta = 1^\circ$ blir $|\varepsilon| = \frac{1}{22}''$; $\delta = 1'$ ger $|\varepsilon| = 2 \cdot 10^{-7''}$ och $\delta = 1''$ ger $|\varepsilon| = 10^{-12''}$.

Vi skola i följande metod tillämpa denna princip på resp. $\beta = \frac{\alpha}{4}$ och $\beta = \frac{3}{8}\alpha$.

4:e metoden. Se fig. 13. $\angle AOB = \alpha$; de båda koncentriska cirklarnas radier $OA_1 : OA = 1 : 2$; C_1 är mittpunkten på bågen A_1B_1 och D_1 är mittpunkten på B_1C_1; radien D_1O skär, utdragen, den större cirkeln i D; M är mittpunkten på bågen A′D.

1:a varianten. Linjen MC_1 bildar med DD_1 vinkeln

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2^9 \cdot 3}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \frac{1}{2^{17}}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^5 + \dots$$

Max. felet vid $\alpha = 90°$ är $\varepsilon_1 = 19{,}3''$.

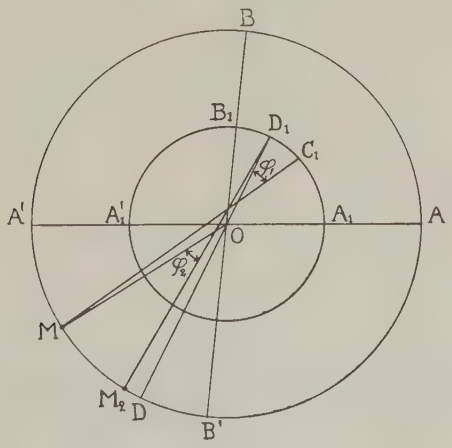


Fig. 13.

2:a varianten. M_2 är mittpunkten på bågen MB^1. Linjen MO bildar med M_2D_1 vinkeln

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2^{12} \cdot 3}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 - \frac{1}{2^{22}}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^5 - \dots$$

Max. felet: $\varepsilon_2 = -2{,}4''$.

Konstruktionerna äro enkla, kunna lätt utföras med linjal, om cirklarna äro givna, och ge anmärkningsvärt goda resultat.

5:e metoden. (Se fig. 14.) $\sphericalangle AOB = \alpha$; hos de tre koncentriska cirklarna förhålla sig radierna $OC : OB' : OA = 1 : 2 : 3$; linjen C'C skär kordan AB i D; på denna kordas förlängning avsättes punkten E så, att $AE = AD$; cirkeln E(EF) skär O(OA) i F, varvid radien $EF = AB$. Linjen FO skär den innersta cirkeln i J och den mellersta i G; H är

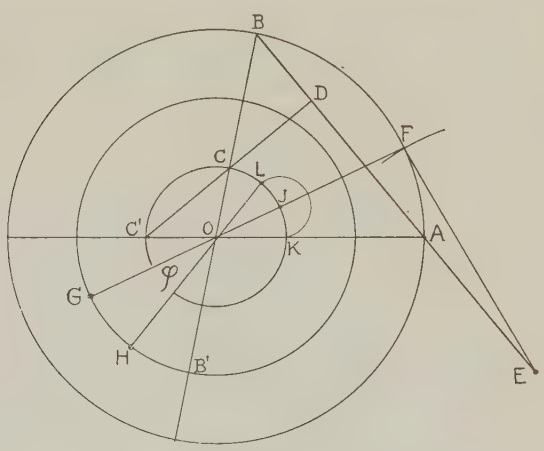


Fig. 14.

mittpunkten på bågen GB'; bågen JL = bågen JK. Linjerna GJ och HL skära varandra under vinkeln φ, varvid gäller:

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2^6 \cdot 3^{10}}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{15} + \frac{5}{2^8 \cdot 3^{11}}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{17} + \frac{7 \cdot 19}{2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{19} + \cdots$$

Maximala felet är, noga räknat, $\frac{1''}{263\,252}$ vid $\alpha = 90°$.

6:e metoden. (Se fig. 15.) $\sphericalangle AOB = \alpha$; de båda cirklarna $O(OA_1)$ och O(OA) hava radierna $OA_1 : OA = 1 : 2$. Bissektrisen till $\sphericalangle AOB$ skär den inre cirkeln i C_1 och den yttre i C; B_1C_1 skär mittnormalen till OA i D_1; sträckan B_1D_1 avsättes på BC såsom BD; D_1D skär yttre cirkeln i E; bågen BE avsättes från A' såsom

A′E′. M är mittpunkten på bågen AE. Radien OM skär den inre cirkeln i M_1. $\sphericalangle BE'M_1 = \varphi$. Max. felet = $= \frac{1''}{439\,000}$ vid $\alpha = 70°15'$. Metoden kan betraktas som en utveckling av Karajordanoffs metod. Anmärkas må, att den

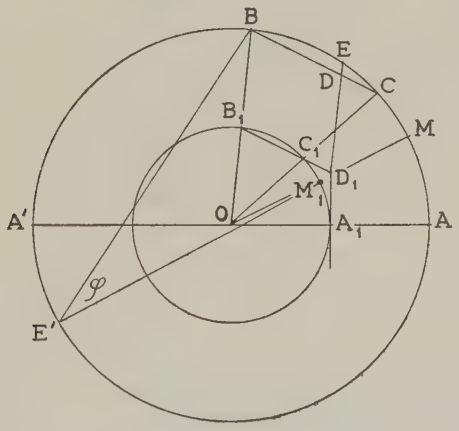


Fig. 15.

kan slutföras enbart genom linjalkonstruktioner,[1] även om blott en cirkel är given. Men bilden blir då så överhopad av linjer, att den förlorar sin överskådlighet. (Detsamma gäller de flesta dylika konstruktioner).

7:e metoden. Denna metod ansluter sig till 3:e metoden och kan liksom denna lätt utvecklas i olika varianter. Vi nöja oss med ett exempel (se fig. 16). Hos de tre cirklarna med medelp. O förhålla sig radierna $OA_1 : OA_2 : OA = 1 : 2 : 3$. $\sphericalangle AOB = \alpha$ har bissektrisen C_1C'. Bågen B_1C_1 har mittpunkten D_1; $C'D_1$ skär den största cirkeln i E; bågen EA har mittpunkten M; MO skär den minsta cirkeln i M_1 och (utdragen) mellancirkeln i N; P är mittpunkten på bågen NB_2; bågen $FM_1 = M_1A_1$. Linjen FP bildar med MN

[1] Jfr Enriques, Fragen der Elementargeometrie II.

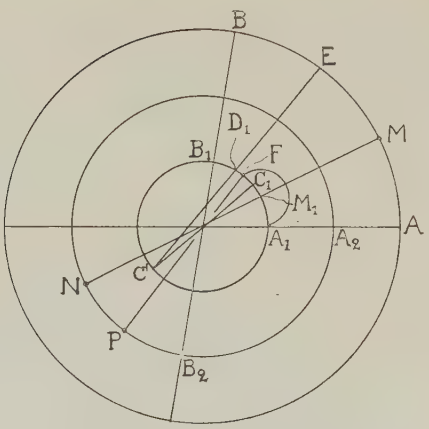


Fig. 16.

vinkeln φ

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2^{27} \cdot 3^4}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^9 + \cdots$$

Maximala felet vid $\alpha = 90°$ är $\dfrac{1''}{17\,800\,000}$.

8:e metoden. (Se fig. 17.) $\measuredangle AOB = \alpha$. På kordan AB välja vi punkten C så, att $BC = \frac{1}{3}AB$, draga normalen CD och kordan BD. Vi skaffa oss sträckan $AG = \frac{1}{3}(2BD + BC)$. Cirkeln A(AG) skär AB i E. Linjen GE skär linjen AO i K och cirkeln i H. Vi återfinna $\measuredangle GOA = \varphi_1 = \frac{\alpha}{3} + \varepsilon_1$ såsom Dürers ena vinkel (där $\varepsilon_1 < 0$). Vi hava emellertid en annan vinkel: $\measuredangle GKA = \vartheta$ i figuren, som är av större intresse. Den är nämligen så beskaffad, att $4\vartheta - \varphi_1 = \alpha$, varav: $\vartheta = \frac{\alpha}{3} + \frac{\varepsilon_1}{4}$ d. v. s. felet hos ϑ är alltid en fjärdedel av felet hos φ_1. Hos ϑ är max. felet $= -3{,}87''$, se vidare tab. 2.

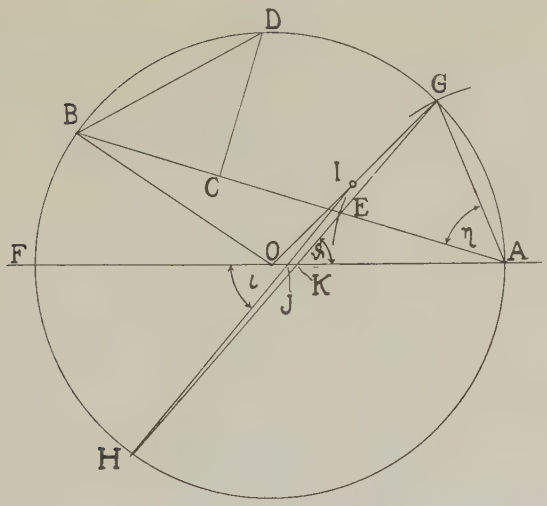


Fig. 17.

Vi kunna nu även skapa vinkelkombinationer med mindre fel genom att begagna $\measuredangle \mathrm{GAE} = \eta = \frac{\alpha - \varphi_1}{2} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\varepsilon_1}{2}$ och konstruera $\frac{\eta + \vartheta}{2} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\varepsilon_1}{8}$; $\frac{\eta + 3\vartheta}{4} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\varepsilon_1}{16}$; $\frac{3\eta + 5\vartheta}{8} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\varepsilon_1}{32}$ o. s. v. Maximala felet hos sistnämnda vinkel är $0{,}^{\prime\prime}48$.

9:e metoden. En betydligt noggrannare vinkel få vi dock på enklare sätt. Vi sammanbinda helt enkelt punkten H (fig. 17) med mittpunkten I på radien OG. Den så erhållna linjen skär AF i J. $\measuredangle \mathrm{HJF} = \iota = (\text{approx.}) \frac{\alpha}{3}$. Felet $\triangle\iota$, definjerat av relationen $\iota = \frac{\alpha}{3} + \triangle\iota$, kan beräknas ur serieutvecklingen:

$$\triangle\iota = \frac{8}{81}(\vartheta - \varphi_1)^3 + \frac{8}{243}(\vartheta - \varphi_1)^5 + \ldots$$

eller med hjälp av den tidigare uträknade lilla vinkeln ε_1

$$\triangle \iota = -\frac{1}{24}\varepsilon_1^{\,3} - \frac{1}{128}\varepsilon_1^{\,5} - \ldots$$

Enär ε_1 kan skrivas i första approximationen:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{144}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^7,$$

fås slutligen:

$$\iota = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2^{15} \cdot 3^7}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{21} + \ldots$$

eller approx:

$$\iota = \frac{\alpha}{3} + 1{,}334 \cdot 10^{-18} \cdot \alpha^{21}.$$

Maximala felet (vid $\alpha = 90^\circ$) är $1{,}75 \cdot 10^{-14}$ radianer eller $\frac{1''}{276\,800\,000}$. Detta innebär, att om vi dela en kvadrant av jordens omkrets, skulle felet i bågen på jordytan bli $0{,}11\ \mu$. Om vi dela en vinkel $\alpha = 30^\circ$ och hava en cirkel lika stor som jordens bana kring solen ($r = 15\,000\,000$ mil), skulle vi få ett vinkelfel av $3{,}30'' \cdot 10^{-19}$, svarande mot ett bågfel av $2{,}4 \cdot 10^{-11}$ cm. Denna längd är mindre än $\frac{1}{1\,000}$ av det värde ($2{,}72 \cdot 10^{-8}$ cm.), som kinetiska gasteorien tilldelar vätemolekylens diameter. Slutligen blir felet vid delningen av en 10°-vinkel så liten ($1{,}6 \cdot 10^{-34}$ radianer), att vi kunna låta vinkelns spets vara belägen i en punkt på 10 gånger Andromedanebulosans avstånd från oss, alltså c:a 9 000 000 ljusår, och få då en tredjedelsbåge, vars längd är 520 000 ljusår (Vintergatans största utsträckning uppskattas till c:a 220 000 ljusår), medan felet i den väldiga bågen endast blir $1{,}36 \cdot 10^{-9}$ cm. eller lika med $\frac{1}{20}$ av diametern hos en vätemolekyl. Felet i vinkeln svarar alltså mot bredden av en vätemolekyl, sedd på ett avstånd av 180 000 000 ljusår.

10:e metoden. Med hjälp av ett litet konstgrepp vid konstruktionen kunna vi gå ännu ett steg längre och pressa ned felet till under en milliondel av vad det var hos föreg. metod. Vi göra för tydlighetens skull om konstruktionen från början och välja följande förfaringssätt: (se fig. 18)

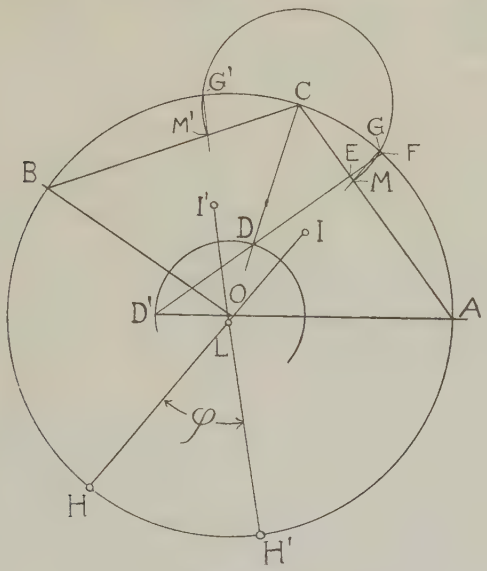


Fig. 18.

$\angle AOB = \alpha$; $OA = 3\,OD'$; vinkelns bissektris OC skär cirklarna O(OD′) i D och O(OA) i C. Linjen D′D skär kordan AC i E och O(OA) i F. Sträckan $CG = \frac{1}{3}\,(CE - 2\,CF)$. Cirkeln C(CG) skär O(OA) i G och G′ samt kordorna CA och CB i resp. M och M′. Om linjerna GM resp. G′M′ utdragas, skära de den stora cirkeln i H resp. H′. I och I′ äro mittpunkterna på radierna OG och OG′ (radierna icke utritade på fig.). Linjerna IH och I′H′ skära varandra i L. $\angle HLH' = \varphi$ är med utomordentligt stor noggrannhet $= \frac{\alpha}{3}$.

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2^{35} \cdot 3^7}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{21} + C\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{23} + \ldots$$

eller approx:

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + 1{,}227 \cdot 10^{-24}\, \alpha^{21}.$$

I anslutning till de exempel, som anförts under föregående metod, kunna vi uppskatta föreliggande metods fel på följande sätt. Maximala felet (vid $\alpha = 90^\circ$) är $\frac{1''}{290\,000\,000\,000\,000}$, vilket vid jordytan motsvarar $1{,}07 \cdot 10^{-11}$ cm eller mindre än $\frac{1}{2\,000}$ av diam. hos vätemolekylen. Vid $\alpha = 30^\circ$ kunna vi förlägga vinkelspetsen till Sirius (8,3 ljusår) utan att bågfelet nämnvärt ändras ($1{,}25 \cdot 10^{-11}$ cm.). Vid $\alpha = 10^\circ$ kunna vi med bibehållande av samma bågfel förlägga vinkelspetsen till en trakt av universum på 10^{10} gånger Sirius' avstånd från oss.

11:e metoden. Visserligen är ju noggrannheten redan fullt tillfredsställande för alla praktiska behov, men det kan vara av ett visst teoretiskt intresse att undersöka, huruvida man genom någon enkel åtgärd kan komma längre. Vi kunna lämpligen förbättra den i föreg. metod funna vinkeln enligt den tidigare beskrivna principen, som illustreras av fig. 12. Den sålunda förbättrade vinkeln blir:

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2^{108} \cdot 3^{22}} \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{63} + \cdots$$

Maximala felet blir här blott $4 \cdot 10^{-56}$ bågsek., en kvantitet, som mycket snabbt minskar samtidigt med α (jfr tab. 2). Att åskådligt illustrera hithörande små vinkelfel låter sig tyvärr icke göra, enär inga kända atomära eller stellära distanser passa för ändamålet.

Tab. 2.

Felet i bågsekunder hos olika metoder.

Nr	$\alpha = 90°$	60°	30°	10°
	$\frac{\alpha}{3} = 30°$	20°	10°	3°20′
1	0,942	$2{,}44 \cdot 10^{-2}$	$4{,}78 \cdot 10^{-5}$	$2{,}43 \cdot 10^{-9}$
2	$3{,}68 \cdot 10^{-3}$	$9{,}58 \cdot 10^{-5}$	$1{,}87 \cdot 10^{-7}$	$9{,}50 \cdot 10^{-12}$
3: I	— 38,5	— 11,4	— 1,43	$5{,}28 \cdot 10^{-2}$
3: II	19,3	5,71	0,713	$2{,}64 \cdot 10^{-2}$
3: III	— 9,63	— 2,85	— 0,352	$-1{,}32 \cdot 10^{-2}$
4: I	19,3	5,71	0,713	$2{,}64 \cdot 10^{-2}$
4: II	— 2,41	— 0,713	$-8{,}91 \cdot 10^{-2}$	$-3{,}30 \cdot 10^{-3}$
5	$3{,}77 \cdot 10^{-6}$	$8{,}01 \cdot 10^{-9}$	$2{,}35 \cdot 10^{-13}$	$1{,}62 \cdot 10^{-20}$
6	0	$-1{,}41 \cdot 10^{-6}$	$-2{,}12 \cdot 10^{-7}$	$-1{,}70 \cdot 10^{-11}$
7	$5{,}61 \cdot 10^{-8}$	$1{,}46 \cdot 10^{-9}$	$2{,}85 \cdot 10^{-12}$	$1{,}45 \cdot 10^{-16}$
8	— 3,87	— 0,227	$-1{,}77 \cdot 10^{-8}$	$-8{,}09 \cdot 10^{-7}$
9	$3{,}61 \cdot 10^{-9}$	$7{,}24 \cdot 10^{-18}$	$3{,}45 \cdot 10^{-19}$	$3{,}30 \cdot 10^{-29}$
10	$3{,}45 \cdot 10^{-15}$	$6{,}93 \cdot 10^{-19}$	$3{,}30 \cdot 10^{-25}$	$3{,}15 \cdot 10^{-35}$
11	$-4{,}01 \cdot 10^{-56}$	$-3{,}23 \cdot 10^{-67}$	$-3{,}51 \cdot 10^{-86}$	$-3{,}06 \cdot 10^{-116}$

Ovanstående värden ha beräknats med hjälp av de *approximativa* formler, som angivits i texten.

Ur den nyare isotopforskningen.

Av NILS RYDE.

Utforskandet av och sökandet efter isotopa element, vilket energiskt bedrivits ända sedan de upptäcktes, — för ung. tre decennier sedan vid de radioaktiva elementen och ej lång tid därefter även vid de icke-radioaktiva elementen — har fått en särskild aktualitet till följd av det stora intresse, som under de senaste åren knutits till studiet av atomkärnornas byggnad. Avsikten med föreliggande uppsats är att i korthet beröra de viktigaste av de nyare landvinningar, som isotopforskningen gjort huvudsakligen under de senaste tio åren.

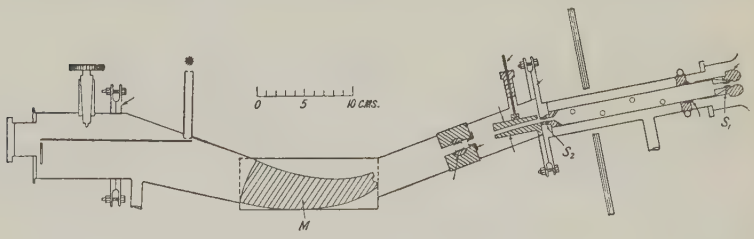


Fig. 1.

Den mass-spektrografiska metoden för isotopundersökning har som bekant väsentligen utvecklats av ASTON, vilken 1919 konstruerade sin första, berömda mass-spektrograf. På grundval av de erfarenheter, som gjorts med denna, påbörjade Aston 1921 byggandet av en ny apparat. Den blev färdig först 1925, men då hade ett verkligt precisionsinstrument skapats med en upplösningsförmåga av 1 på 600 och med en mätnoggrannhet av 0,1 $^0/_{00}$. Fig. 1 visar ett längdsnitt genom den nyare apparaten. Spalterna S_1 och S_2, som av-

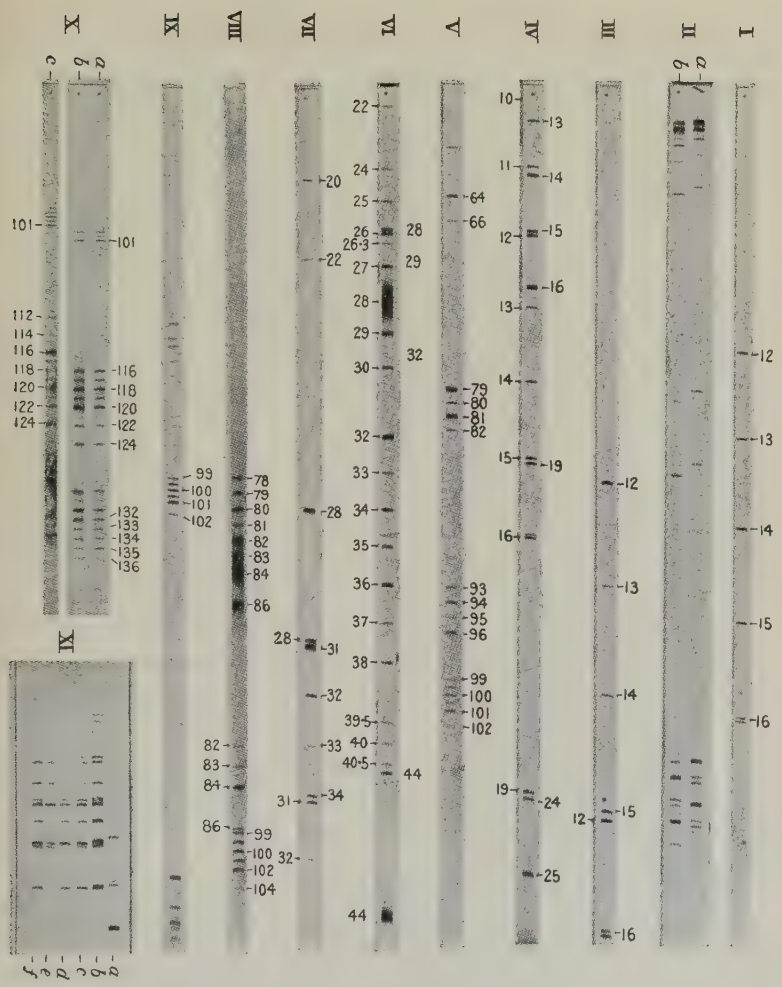


Fig. 2.

gränsa strålknippet, voro smalare (ung. 0,02 mm) och belägna på större avstånd från varandra än i den första mass-spektrografen. Den elektriska avlänkningen gjordes också större. Fältplattorna måste därvid befinna sig så nära varandra, att det var nödvändigt att göra dem krökta för att lämna den

avböjda strålningen fri passage. Spänningsskillnaden mellan plattorna kunde hållas konstant på 0,01 ‰ när med användning av specialkonstruerade ackumulatorer. Magnetfältet alstrades av en för ändamålet byggd elektromagnet. Med den kunde ganska höga fältstyrkor åstadkommas, utan att nämnvärd uppvärmning inträdde. Polskorna hade den form, som den streckade ytan *M* visar. Spaltmellanrummet evakuerades med en diffusionspump. Dessutom voro en hel del andra sinnrika förbättringar utförda, föranledda av gjorda erfarenheter med den första spektrografen. En anmärkningsvärd svårighet, som Aston hade att övervinna, bestod däri, att fältplattorna polariserades av kanalstrålningen, så att den anlagda spänningen ej gav ett mått på den verkliga elektriska fältstyrkan mellan fältplattorna. Genom att förgylla plattorna kunde effekten avsevärt nedsättas — för att helt eliminera den måste särskilda mätningsarrangemang träffas (se nedan). Fig. 2 visar en del spektrogram, upptagna med den nya spektrografen åren 1925—27. Såsom fig. visar är mass-skalan på spektrogrammen nästan lineär — en oväntad men förträfflig egenskap. För en massändring av 1 % varierar »dispersionen» från 1,5 mm (övre delen av fig.) till 3 mm (nedre delen). Med instrumentet ha hundratals isotopers atomvikter noggrant bestämts, och en mängd nya isotoper har upptäckts därmed, framförallt bland de tyngre elementen, för vilka den äldre mass-spektrografen ej förmådde upplösa alla isotoperna.

Det är intressant att något närmare taga del av Astons mätmetoder. Den noggrannhet, som kan ernås genom direkt beräkning av avlänkningarna, är otillräcklig. För att få en första orientering på mass-spektrogrammen kan man förfara på följande sätt. En blandning av t. ex. koldioxid och metan undersökes. Man vet från tidigare undersökningar enl. denna och andra metoder, vilka linjer, som äro att vänta, och de mot dem svarande jonernas vikter kunna anses bekanta ur de kemiska atomviktsbestämningarna. En plåt upptages, och linjernas avstånd från en viss referenspunkt uppmätas.

Massorna m_1, m_2, m_3, ... representeras grafiskt såsom funktion av avståndet från referenspunkten. Man får då en kalibreringskurva, som dock på grund av det ringa antalet punkter ej är särdeles noggrann. Genom förändring av magnetfältets styrka kunna linjerna placeras på andra avstånd från referenspunkten, vilka uppmätas. Mot dessa nya avstånd svara enl. kalibreringskurvan massorna m'_1, m'_2, m'_3, ... Då gäller $\frac{m'_1}{m_1} = \frac{m'_2}{m_2} = \frac{m'_3}{m_3} = \ldots = r$. Medelvärdet av dessa förhållanden bildas. De kända massorna m_1, m_2, m_3, ... multipliceras med detta medelvärde och giva en serie nya massvärden, som inprickas på kalibreringskurvan. Förfarandet upprepas, tills kalibreringskurvan är tillräckligt noga bestämd. Med kännedom om denna kurva är det tillräckligt att identifiera en enda linje på ett spektrogram, för att massorna, svarande mot alla de andra linjerna, skola kunna beräknas. Det är möjligt att kontrollera resultaten genom en metod, som gör kännedom om kalibreringskurvan onödig. Antag, att det gäller att jämföra en obekant massa m' med en bekant massa m. Vid en bestämd elektrisk fältstyrka E och en bestämd magnetisk fältstyrka H får man en mot m svarande, bestämd linje. Genom att ändra E och H till E' och H' kan man få den linje, som svarar mot m' att koincidera med den förra linjen. Av relationerna, som gälla för avlänkningarna i det elektriska och i det magnetiska fältet, härleder man lätt, att vid koincidens $\frac{m}{m'} = \frac{E'}{E} \cdot \frac{H^2}{H'^2}$. Då det är svårt att mätbart förändra magnetfältets styrka, kan man hålla H konstant och endast variera E. Denna metod kallas *koincidensmetoden*. Den ligger till grund för två andra metoder: *inneslutningsmetoden* och *metoden med dubbelspektra*. Vid den förra beräknar man för det fall, att förhållandet mellan massorna är ungefär känt, den spänning E', som skulle ge koincidens, men anlägger inte denna spänning utan i stället spänningarna $E' + h$ och $E' - h$ efter varandra, där h är en i förhållande till E' liten spänning.

Detta tillgår i själva verket så, att de båda spänningarna omväxlande och i rask följd anläggas, varigenom man kan göra sig oberoende av små förändringar av magnetfältet. Förhållandet mellan de tider, de båda spänningarna ligga an, avpassas, så att linjerna bliva lika intensiva. Man får på så sätt två linjer svarande mot m', en på vardera sidan om linjen svarande mot m. Enligt denna metod bestämde Aston förhållandet mellan väteatomens och vätemolekylens massa samt förhållandet mellan vätemolekylens och heliumatomens massa. Metoden med dubbelspektra är den mest använda. Den utföres på följande sätt. Antag, att massorna m_1 och m_2 skola jämföras. Man upptar då på samma plat och med samma magnetfält dels ett spektrum, som ger den mot m_1 svarande linjen på ett visst ställe, dels ett spektrum med den elektriska fältstyrkan förändrad, så att linjen svarande mot m_2 faller i omedelbar närhet av den förra linjen. Detta äger rum på samma sätt som ovan är antytt. Sedan upptages med exakt samma elektriska spänningar men med ett annat magnetfält ett andra spektrum, i vilket finnas linjer, svarande mot två bekanta massor m_3 och m_4, vilkas förhållande är så nära lika som möjligt förhållandet m_1/m_2. Genom lämpligt val av magnetfältets styrka bringas de båda mot m_3 och m_4 svarande linjerna i närheten av de båda först upptagna linjerna. Genom att mäta upp linjeavstånden kan med kännedom om m_3 och m_4 förhållandet mellan spänningarna beräknas och därur i sin tur förhållandet mellan massorna m_1 och m_2. Härigenom kan polarisationseffekten helt elimineras.

För att av mass-spektrogrammen kunna bestämma atomslagens mängdförhållanden använde Aston ett särskilt fotografiskt-fotometriskt förfarande. En mera direkt bestämning av dessa förhållanden möjliggjorde den mass-spektrografiska metod, som av DEMPSTER utvecklats ungefär samtidigt med att Aston konstruerade sin första mass-spektrograf, och enligt vilken metalljonerna tilldelas möjligast lika energi, varefter deras avböjning i ett magnetiskt fält studeras.

En mass-spektrografisk metod analog med den Dempsterska har med framgång använts av andra forskare. Därvid undersökas partiklar med möjligast lika hastighet, vilket åstadkommes med s. k. hastighetsfiltra. I dem bortfiltreras alla partiklar, som inte ha en viss bestämd hastighet. Det kan ske på olika sätt. SMYTHE använde 1926 högfrekvensfält såsom filtra. Bättre resultat har BAINBRIDGE under de sista åren uppnått genom att använda ett s. k. Wienskt

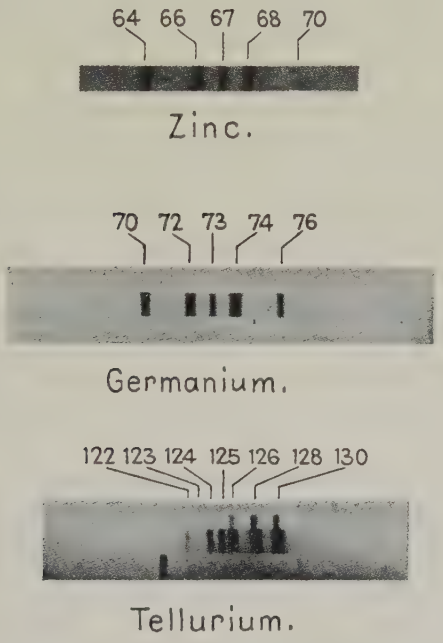


Fig. 3.

filtrum, i vilket den med avseende på hastigheten inhomogena strålningen från ett kanalstrålrör får passera ett kombinerat elektriskt-magnetiskt fält, så avpassat, att för partiklar av en viss hastighet avlänkningarna äro lika stora och motsatt riktade. Efter passagen av en spalt avböjes den homogena strålningen i ett magnetiskt fält längs halvcirklar och träffar därefter en fotografisk plåt. Anordningen är, sedan förbättringar av den ursprungliga appa-

raten utförts, i många avseenden jämngod med Astons andra mass-spektrograf och överträffar denna på vissa punkter. Sålunda är t. ex. mass-skalan exakt lineär; en annan fördel är, att strålarna träffa den fotografiska plåten under rät vinkel, vilket däremot ej alls är fallet vid Astons anordning (jfr fig. 1). Med sin i princip från Astons helt skilda metod har Bainbridge kunnat bekräfta en stor del av de av Aston tidigare uppnådda resultaten. Fig. 3 visar tre av Bainbridge upptagna mass-spektrogram. Bainbridge har utfört en synnerligen noggrann bestämning av den tunga väteatomens massa.

De nu beskrivna metoderna med kanalstråleanalys ha alla den olägenheten, att mycket sällsynta isotoper svårligen låta sig med säkerhet fastställas, i synnerhet om de motsvarande jonernas spec. laddning är lika med spec. laddningen för en jon av en förorening. I detta avseende äro de spektroskopiska metoderna för isotopundersökning överlägsna. De ha under de senaste åren fått en allt större betydelse Vi behöva ju endast tänka på att det var på spektroskopisk väg, som den tyngre väteisotopen ^2H först upptäcktes.[1] Teoretiskt äro ju endast helt små skillnader i spektra av de olika isotoperna av ett element att vänta, och det har också erfarenheten bekräftat. Men de spektroskopiska metoderna möjliggöra en så utomordentligt stor mätnoggrannhet, att isotopieffekten i många fall varit fullt mätbar. En isotopförskjutning kan ha sitt ursprung dels i massdifferens mellan kärnorna, dels i olika kärnspinn och dels i olikheter i kärnans fält. Inom atomspektra ligga förhållandena enklast till vid de vätelika atomernas och jonernas spektra. Här kan man lätt visa, att isotopförskjutningen $\Delta\nu = \mu \cdot \frac{M'' - M'}{M' \cdot M''} \cdot \nu$, om ν är linjens vågtal, $\mu =$ elektronens massa samt M' och M'' massorna

[1] Beträffande nomenklaturen är att märka, att man på sista tiden kommit överens om att karakterisera en isotop genom dess kemiska beteckning med det s. k. masstalet, d. v. s. det hela tal, atomvikten ligger närmast, upptill till vänster. Vill man dessutom ange kärnans laddning, sättes detta tal nedtill till vänster (t. ex. $^{20}_{10}Ne$).

av två isotoper. Man beräknar t. ex. härur för de 4 första linjerna i vätets Balmerserie $\Delta\nu \cong 4$—7 cm^{-1} mellan ^1H och ^2H. Så stora differenser mätas lätt med de vanliga spektrografiska metoderna. Vid övriga atomspektra är frekvensskillnaden avsevärt mindre: $\Delta\nu < 1$ cm^{-1}. För dessa måste i allm. interferensspektrografiska metoder tillgripas. Det har visat sig, att förskjutningarna i allm. äro större för de tyngsta och för de lättaste elementen än för element, som ha atomvikter däremellan. Förhållandena äro oftast utomordentligt komplicerade, då den finstruktur, den s. k. hyperfinstrukturen, man mäter, förutom av isotopieffekt också kan bero av andra orsaker. Man kan nämligen observera en hyperfinstruktur också hos ämnen, som med säkerhet ej ha några isotoper. Det är därför många gånger ytterst svårt att i en linjestruktur avgöra, vilka linjer, som bero av isotopieffekten, och vilka linjer, som uppkomma av andra orsaker. I neon, litium och bly har man funnit en isotopieffekt, som ganska väl överensstämmer med teoretiska beräkningar, som utförts av Hughes och Eckart. Förutom i väte har metoden att undersöka atomspektra lett till upptäckt av isotoper bl. a. i tallium och bly, och existensen av dessa har Aston senare kunnat verifiera.

Större betydelse för isotopforskningen ha hittills undersökningar av molekylernas bandspektra haft. Dessa uppstå ju genom en förändring av molekylens energitillstånd, vilket i sin tur beror dels av kärnsvängningsenergien, dels av molekylens rotationsenergi och dels av elektronenergien. Isotopieffekten gör sig huvudsakligen tillkänna vid rotations- och kärnsvängningsenergien. I båda ingå molekylernas trögheitsmoment. Vid en tvåatomig molekyl är trögheitsmomentet $J \sim \frac{M \cdot M_1}{M + M_1}$, där M och M_1 äro de båda kärnornas massor. Är M_2 massan hos kärnan av en isotop till M_1, så kan man under vissa förenklande antaganden härleda, att isotopieffekten $\Delta\nu \cong \left[\sqrt{\frac{M_1(M + M_2)}{M_2(M + M_1)}} - 1\right] (\nu^{sv} + 2\nu^{rot})$, vari ν^{sv}

och ν^{rot} äro de bidrag till vågtalet, som kärnsvängningsenergien resp. rotationsenergien ge. Vi kunna redan härav se, att isotopieffekten i bandspektra måste vara av en helt annan och större storleksordning än i atomspektra. En teori för effekten har utvecklats främst av MULLIKEN. Den bandspektroskopiska metoden är överlägsen alla andra metoder, då det gäller att påvisa isotoper, som endast förekomma i ringa mängd. Förhållandet mellan isotopernas massa kan noga bestämmas; däremot kan metoden icke användas för att bestämma massornas absoluta värden. Genom studium av bandspektra ha inte endast många tidigare på annat sätt funna isotoper kunnat återfinnas utan också flera nya isotoper påvisats. De viktigaste av dem äro kolisotopen ^{13}C, kväveisotopen ^{15}N och de båda syreisotoperna ^{17}O och ^{18}O. Upptäckten av syrets isotoper var värdefull därigenom, att man på grund därav kunde fastställa, att den kemiska atomviktsbasen och Astons atomviktsbas ej sammanfalla, då nämligen Astons skala baserar sig på ^{16}O, medan den kemiska skalan sätter syreisotopblandningens atomvikt = 16. Isotoperna ^{17}O och ^{18}O förekomma emellertid i så små mängder, att skillnaden mellan de kemiska atomvikterna och Astons är mycket liten. För att beräkna kemiska atomvikter ur Astons måste man multiplicera de sistnämnda med $\frac{15.9965}{16}$. Både ur atomernas linjespektra och ur molekylernas bandspektra kunna de relativa isotopmängderna bestämmas, ehuru noggrannheten därvid ej är så stor som vid de mass-spektrografiska metoderna.

Vid kärnsprängningsförsök har man som bekant utvecklat särskilda metoder för att påvisa och mäta massan av de därvid uppkommande isotoperna.[1] Sålunda har man ju bl. a. upptäckt en mängd i naturen icke förekommande radioaktiva isotoper med större el. mindre livslängd. Antalet dylika inducerat radioaktiva isotoper befinner sig i snabbt stigande.

[1] Jfr uppsatsen av O. LUNDQUIST i denna tidskrift, Årg. 18, s. 95—109.

Det uppgår för närvarande till mer än 10 % av totala antalet kända isotoper, vilket är närmare 350. Av dem äro ung. 40 naturligt radioaktiva isotoper.

Alltsedan isotopiens upptäckt ha energiska försök gjorts att åstadkomma en separation av isotoperna. Ett mycket stort antal metoder har föreslagits, men av dem har endast ett fåtal givit något resultat. En metod, som i princip enkelt leder till en fullständig separation, är föreslagen av Aston och går ut på att i en mass-spektrograf var för sig uppfånga de jonströmmar, som motsvara de olika isotoperna. Metoden har naturligtvis inget annat fel, än att de substansmängder, som på detta sätt kunna fås, äro försvinnande små. Man har ändå verkligen lyckats uppsamla några mikrogram av litiums isotoper på detta sätt. Detta har utförts av Oliphant och hans medarbetare, och de isotopmängder, de erhöllo, voro tillräckliga för att utföra en del kärnsprängningsförsök. Det ligger nära till hands att för isotopseparation använda sig därav, att en gas' diffusionshastighet är omvänt proportionell mot roten ur molekylvikten. Aston gjorde försök att använda denna metod på neon redan 1913. Han lät gasen diffundera genom porösa lerväggar och fick därvid två fraktioner, som dock skiljde sig mycket obetydligt i atomvikt. Enligt samma metod lyckades Brönsted och van Hevesy 1921 sönderdela kvicksilver i två fraktioner, av vilka den lättare hade en atomvikt, som med 0,013 ‰ understeg det vanliga kvicksilvrets. Harkins kunde 1928 framställa en kvicksilverfraktion, vars atomvikt med 0,5 ‰ skiljde sig från det vanliga kvicksilvrets. Brönsted och van Hevesy sökte också separera kvicksilverisotoperna genom destillation vid mycket lågt tryck. Därvid gör kvicksilvrets yta samma tjänst som en porös vägg. Lättare isotoper avdunstar hastigare än tunga, och följaktligen bör destillatet ha mindre atomvikt än återstoden i destillationsapparaten. De fingo på så sätt två något olika fraktioner. I alla de anförda fallen voro ändringarna i isotopernas mängdförhållanden ytterst små. Den förste, som lyckades uppnå en verklig

separation av ett ämnes isotoper, var HERTZ. Denne arbetade med neongas och använde diffusionsmetoden. Gasen fick diffundera genom porösa lerväggar, varvid trycket på ena sidan av väggarna var mycket lågt. Det väsentliga i Hertz' anordning var, att han efter varandra kopplade ett stort antal diffusionsceller, genom vilka gas kontinuerligt fick passera. Fig. 4 visar en diffusionscell av enklaste slag. Vid ena ändan *A* av ett poröst lerrör inträder gasblandningen. En lättare del diffunderar genom röret och pumpas bort genom *B*. Den återstående, tyngre delen bortgår genom *D*. Denna enkla anordning har det felet, att i rörets vänstra

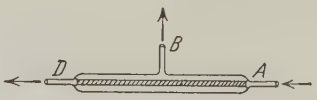


Fig. 4.

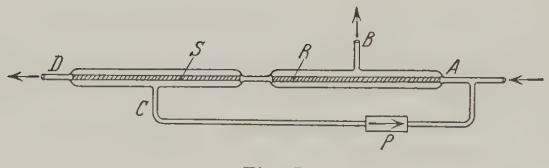


Fig. 5.

del anrikningen av den tyngre isotopen redan är så stor, att gasblandningen, som diffunderar genom denna del av röret, har gasens ursprungliga sammansättning. För att avhjälpa detta fel delade Hertz röret i två delar *R* och *S* (fig 5). Vid *B* bortpumpades såsom förut den lättare blandningen. Den tyngre delen fick passera genom *S*, varvid den del, som diffunderade genom *S*:s vägg, genom *C* bortskaffades med pumpen *P*, därpå återfördes till *A* och ånyo fick genomströmma röret. Genom *D* bortfördes den tyngre delen av blandningen. Hertz kopplade nu en serie sådana separationsceller efter varandra. Fig. 6 visar en anordning med fyra celler. Pumparna utgjordes av kvicksilverdiffusionspumpar. I behållarna V_l och V_s samlades den lättare, resp. den tyngre

isotopen. Vid den första uppställningen 1932 använde Hertz 24 separationsceller och kunde inom loppet av några timmar ändra mängdförhållandet mellan neonisotoperna ^{20}Ne och ^{22}Ne med en faktor av nära 8. HARMSEN, en lärjunge till Hertz, gjorde en del förbättringar i apparaturen och lyckades genom upprepad användning av densamma framställa två fraktioner, den ena innehållande ^{20}Ne och den andra ^{22}Ne, av vilka vardera inte innehöll mer än 1 % av den andra isotopen. Separationens fullständighet kon-

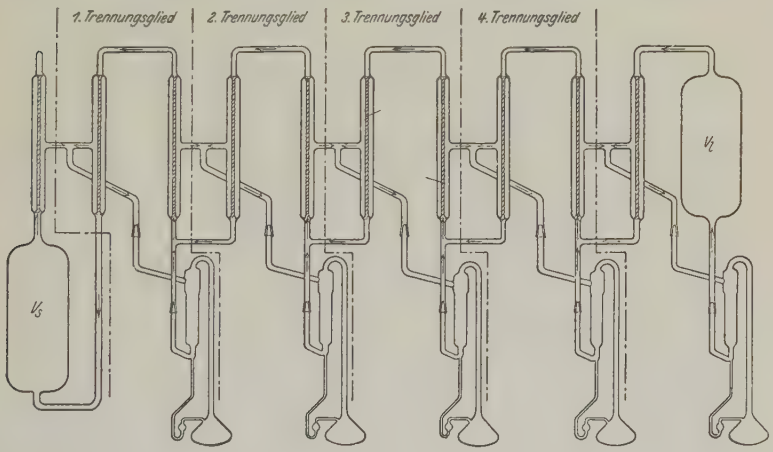


Fig. 6.

trollerades dels med mass-spektrogram, dels med interferens-spektrogram. Ytterligare förbättringar och utökning av antalet separationsceller till 48 gjorde det möjligt för Hertz och Harmsen att utgående från vanlig neongas framställa isotopen ^{22}Ne praktiskt taget ren genom att endast använda apparaten en enda gång. De kunde också med samma apparat skilja vätets isotoper ^{1}H och ^{2}H. Då de utgingo från väte, som endast innehöll 1 $^{0}/_{00}$ av den tyngre isotopen, kunde de på 8 timmar framställa 1 cm^3 av denna isotop av atmosfärstryck. Hertz har för kort tid sedan även angivit ett annat förfarande för separation av isotoper, grundat

på diffusion i strömmande kvicksilverånga. För detta ändamål konstruerade han en speciell diffusionspump, som har den egenskapen, att den ur en gasblandning förmår bortpumpa de beståndsdelar, som diffundera hastigast. Fig. 7 visar tre sådana diffusionspumpar sammankopplade. Med en apparatur, bestående av 12 st. efter varandra kopplade pumpar kunde Hertz på 45 minuter ändra mängdförhållandet mellan neonisotoperna ^{20}Ne och ^{22}Ne med en 10-faktor. Metoden förefaller att med avseende på separationsförmåga vara ungefär jämngod med den tidigare metoden, medan separationshastigheten hos den nya metoden är större. För separation av vätets isotoper kunna ju flera andra metoder användas, som annars ej fört till några resultat, nämligen vanlig fraktionerad destillation — använd redan av upptäckarna — och elektrolys, som tycks ha fått den största betydelsen hittills.

Ett intressant förslag till separation av isotoper har Mrozowski framställt. Bestrålas en blandning av kvicksilverånga och syrgas med ljus svarande mot kvicksilvrets resonanslinje ($\lambda = 2537$ Å), så oxideras kvicksilvret. Den optiska exciteringen av kvicksilveratomerna är en förutsättning för att oxidation skall inträda. Genom att bestråla med ljus från en kvicksilverlampa, vilket filtrerats genom en särskild anordning, är det möjligt att endast excitera de atomer, som tillhöra vissa isotoper. Det har verkligen också lyckats att experimentellt med användning av detta förfarande ändra mängdförhållandet mellan kvicksilverisotoperna.

Aston kunde redan ur resultaten med den första massspektrografen visa, att man hade starka skäl att antaga, att alla atomers vikter med hög grad av noggrannhet kunde uttryckas såsom hela tal. Med precisionsmetoderna är noggrannheten i atomviktsbestämningarna nu så långt driven, att isotopvikterna kunna beräknas med en osäkerhet först i den 4:de el. 5:te decimalen. Dessa bestämningar visa, att avvikelser från heltalsregeln visserligen existera, men de

äro av en avsevärt mindre storleksordning än avvikelserna vid de kemiska atomvikterna. För att få en för jämförelse av isotopvikterna lämplig storhet införde Aston packningsbråket (*packing fraction*), d. v. s. skillnaden mellan isotopvikten och masstalet, dividerad med masstalet. För att få mera lämpliga tal multiplicerades packningsbråken med 10 000. Värdet av packningsbråket faller med växande masstal från det höga värdet 77,8 för väte till 0 vid fluor, blir sedan negativt, når ett minimum vid masstal mellan 50 och 60 och stiger sedan igen för att bli positivt vid kvicksilver.

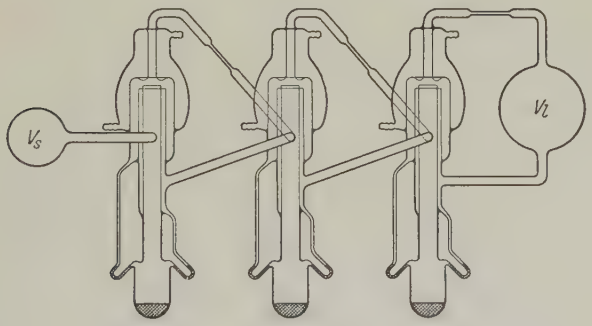


Fig. 7.

Fig. 8 visar en grafisk representation av packningsbråket såsom funktion av masstalet med punkterna svarande mot de olika isotoperna inprickade. Bortser man från ^{4}He, ^{12}C och ^{16}O, så ligga för alla andra atomer de motsvarande punkterna på en hyperbolisk kurva. Den övre kurvan visar de verkliga differenserna mellan isotopvikterna och masstalen såsom funktion av masstalet. Denna kurva har sitt minimum omkring masstalet 115 d. v. s. vid tenn. Det är anmärkningsvärt, att tenn är det ämne, som har de flesta stabila isotoperna (11 st.). I sammanhang därmed kan anföras, att i närheten av packningsbråkskurvans minimum befinner sig järn, som är ett av de i naturen rikligast förekommande elementen.

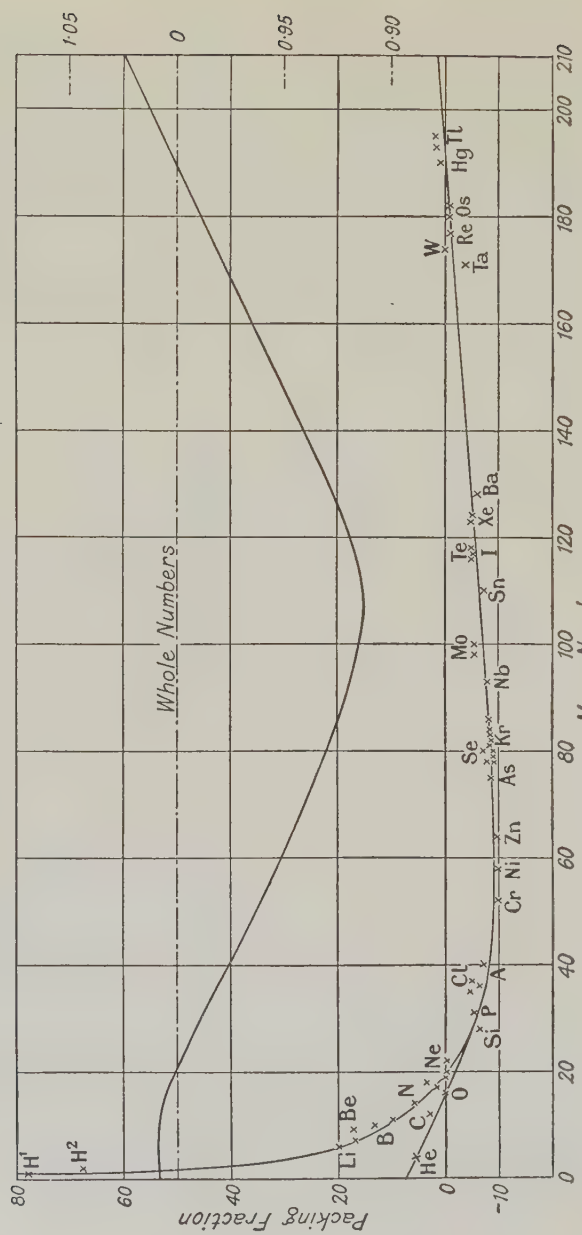

1·05
0
0·95
0·90
Whole Numbers
Packing Fraction
Mass Number
H¹
H²
He
Li
Be
B
C
N
O
Ne
Si
P
Cl
A
Cr
Ni
Zn
As
Se
Kr
Nb
Mo
Sn
I
Te
Xe
Ba
W
Ta
Re
Os
Hg
Tl

Fig. 8.

Benämningen packningsbråk härrör från föreställningar, som man gjort sig om atomkärnornas uppbyggnad av elementarpartiklar. För att en atomkärna skall kunna vara stabil, måste summan av massorna av de ingående elementarpartiklarna vara större än kärnans massa. Skillnaden mellan denna summa och kärnmassan, den s. k. massdefekten, är enligt det Einsteinska sambandet mellan energi och massa $= \frac{E}{c^2}$, där E är bindningsenergien, d. v. s. den energimängd, som frigöres, då elementarpartiklarna packas samman ($c =$ ljushastigheten). Massdefekten och det därmed sammanhängande packningsbråket utgör därför ett mått på atomkärnans stabilitet. De tre atomerna med jämna ordningsnummer ^4He, ^{12}C och ^{16}O, som ligga nedanför packningsbråkskurvan, måste därför vara mycket stabila bildningar, vilket ju också erfarenheten från kärnsprängningsförsöken visat.

Det framgår härav, vilken oerhörd teoretisk betydelse för utforskandet av atomkärnornas byggnad, som en noggrann bestämning av isotopvikterna har. Med kännedom jämväl om isotopernas mängdförhållanden kan man även beräkna de kemiska atomvikterna. Denna rent fysikaliska metod för atomviktsbestämning har framför de kemiska metoderna den fördelen, att endast ytterst små mängder substans erfordras, vars renhetsgrad i allmänhet ej har något inflytande. Det har visat sig, att de båda metoderna i stort sett givit överensstämmande resultat.

Fabrik för framställning av kalksalpeter. Oppau.

I. G. — ett blad ur den kemiska industriens historia.

Av **JOHN LUNDBERG.**

Varje kemilärare med intresse för sitt ämnes tekniska tillämpningar torde väl i den litteratur, han med anledning härav studerat, ha påträffat ovanstående mystiska bokstavssammanställning. Så småningom har han nog också kommit underfund med, att den utgör en bekväm förkortning av firmanamnet »Interessen-Gemeinschaft Farbenindustrie Aktiengesellschaft». Men alla ha kanske ej fått klart för sig, hur denna, först 1925 uppdykande firma kommit till, ej heller vilken oerhörd betydelse den har ej blott för nutida kemisk forskning och kemisk produktion utan även rent ekonomiskt såsom en av världens mest gigantiska affärssammanslutningar.

Jämför man kemisk forskning nu och för ett par mansåldrar sedan, slår det en, att vad kemien för närvarande främst synes eftersträva är klarhet rörande materiens innersta byggnad. Under 1800-talets senare hälft hade den en vida mer *uppbyggande* inriktning, den var i utpräglad grad vad engelsmännen kalla »creative chemistry». Mycket av hela vår livs*uppfattning* kommer kanske att ändras genom de nu pågående forskningarna angående materiens väsen; ofantligt mycket av vår yttre livs*föring* är redan ändrat tack vare de senaste femtio årens uppbyggande kemi.

Den kemiska industriens födelseår kan sättas till 1793, då Leblanc anlade den första sodafabriken. Visserligen hade svavelsyra

framställts enligt blykammarmetoden redan så tidigt som på 1740-talet (Ward i Richmond). I själva verket utgjorde ju denna fabrikation en nödvändig förutsättning för Leblancmetodens genomförande i stor skala. Men å andra sidan var det just sodaindustrien, som genom sitt behov av svavelsyra befordrade blykammarmetodens utveckling mot en såväl kemiskt som ekonomiskt allt större effektivitet.

Det blev likväl ej i Frankrike, som den kemiska industrien först uppblomstrade. De politiska förhållandena där voro vid denna tid allt för labila, för att en dylik utveckling skulle varit möjlig. England blev det land, där Leblanc-sodans fabrikation och den i dess följe utvecklade framställningen av klor och klorkalk växte till verklig kemisk storindustri. Först åtskilligt längre fram på 1800-talet uppstod en dylik även i Frankrike. Tyskland var ännu alltför utarmat efter Napoleon-krigen och alltför sönderstyckat i av tullgränser skilda småstater, för att en liknande utveckling skulle kunna äga rum där. Först då tullföreningen genomförts, då ångbåtar börjat trafikera Rhen (1827) och då den allmänna depressionen lättade, kunde det bli tal om att även i Tyskland söka upparbeta en kemisk industri. Men det tog lång tid, innan tysk företagsamhet kunde arbeta in de väldiga försprång, som England och Frankrike hunnit få på detta område. Den första tyska sodafabriken — säkerligen ej vidare imponerande — anlades 1843 och först i mitten av 1860-talet börjar Tyskland bli internationellt märkbart som producent inom kemisk industri. Produktionssiffrorna för soda äro vid denna tid pr år:

England	243	tusen ton
Frankrike	108	» »
Tyskland	66	» »

Ungefär nu var det också, som en annan gren av kemisk industri började utvecklas: fabrikationen av konstgödning. År 1863 fann Solvay den metod, genom vilken soda kan framställas utan användning av svavelsyra och då kampen mellan Leblanc- och Solvay-fabrikerna ganska snart ledde till de förras förintande, måste svavelsyrefabrikanterna se sig om efter nya avsättningsområden. Ett sådant funno de i superfosfatframställningen. Vid 1860-talets mitt producerade Tyskland årligen c:a ett tusen ton superfosfat. Tjugo år senare var årsproduktionen 400 tusen ton.

Samtidigt med sodaproduktionen utvecklade sig slutligen en tredje stor gren av kemisk industri: lysgasframställningen. Det var 1803, som Murdoch först installerade gasbelysning i Boultons och Watts fabrik vid Birmingham. Möjligheten att i en och samma

process utvinna två så viktiga produkter som gas för belysning och koks för masugnsdrift måste ju i sig bära fröet till en storartad utveckling. Märkvärdigt nog kom en tredje produkt, stenkolstjäran, småningom att stiga till minst lika stor betydelse som gasen och koksen. I början förbisedd och föraktad, gav den i sinom tid upphov till en hel ny industrigren, vars fullkomligt sagolika utveckling icke blott ledde till oanade vetenskapliga resultat utan även till industrier av jättelika mått.

År 1856 upptäckte W. H. Perkin i London den första anilinfärgen, vilken han kallade mauvein. Det för utvecklingen avgörande var emellertid, att Perkin icke blott lyckades framställa detta färgämne utan att han även kunde genomföra en ekonomiskt lönande fabrikation därav i stor skala. Härmed var intresset väckt för framställning av färgämnen ur rå anilin. Anilinet framställdes ur nitrobensol och denna i sin tur ur — på den tiden ännu föga ren — bensol, vilken utgjorde en beståndsdel av stenkolstjära. Det låg därför nära till hands att söka framställa färger ej blott ur anilin och dess homologer utan överhuvudtaget ur tjärprodukter. Stenkolstjäran blev ett experimentalobjekt för oräkneliga kemister, man skulle kunna jämföra den med ett nyupptäckt land, som med feberaktig iver exploateras av guldgrävare. Ty framställningen av tjärfärger visade sig i mycket påminna om guldletande. Rikliga vinster inhöstades av dem, som gjorde de stora upptäckterna — i början ofta av en tillfällighet — förluster och besvikelser träffade många trägna men mindre lyckliga arbetare. Och slutligen strömmade väldiga utdelningar över de kapitalstarka bolag, som omsider togo fältet under bearbetning.

Den första tjärfärgen hade upptäckts i England. Den andra i ordningen, fuksin, framställdes redan två år senare av Verguin i Frankrike. Även på detta område hade alltså England och Frankrike kommit i teten. Men år 1865 inträffade något, som med ett slag lyfte hela arbetet inom detta område till ett nytt plan: då uppställde Kekulé sin teori för bensolmolekylens byggnad. Med denna utgångspunkt hade man fått en fast grund att bygga på och nu kunde tjärfärgsforskningen utveckla sig efter rent vetenskapliga grunder. Den första frukten härav skördade Tyskland, då Graebe och Liebermann år 1868 lyckades framställa konstgjord alisarin.

Vid denna tid arbetade redan några färgfabriker i Tyskland, men tillverkningen försiggick blott i mycket blygsam skala. Redan 1850 hade Friedrich Bayer (senior) i Elberfeld grundat en affär med naturliga växtfärger och år 1863 började man här framställa även konstgjorda färgämnen. Affären omvandlades 1881 till aktie-

bolag under namnet Aktiengesellschaft Farbenfabriken vormals Friedr. Bayer. En annan dylik fabrik startades 1861 i Ludwigshafen (på vänstra Rhenstranden, mitt emot Mannheim). Den hette först Chemische Fabrik Dyckerhoff, Clemm und Co, men omvandlades redan 1863 till aktiebolag under firmanamnet Badische Anilin und Soda-Fabrik. Slutligen grundlade de två kemisterna Eugen Lucius och Wilhelm Meister tillsamman med köpmannen L. A. Müller år 1862 en färgämnesfabrik i Höchst am Main, en liten, numera med Frankfurt införlivad ort. År 1864 inträdde A. Brüning i firman i stället för Müller och 1879 omvandlades även detta företag till aktiebolag under firmanamnet Farbwerke vormals Meister, Lucius und Brüning.

I samtliga dessa fabriker försiggick verksamheten att börja med i synnerligen blygsam skala. Sålunda sysselsatte »fabriken» i Höchst år 1863 fem arbetare, en kontorist och — utom ägarna — en kemist. Ångmaskinen, som lämnade den för driften erforderliga mekaniska energien, var på tre hästkrafter! De i början så anspråkslösa fabrikerna lade emellertid småningom under sig allt större områden av kemisk industri och växte till väldiga företag.

Man kan fråga sig, vilken grunden var, till att den tyska färgämnesindustrien och i samband därmed den tyska kemiska industrien överhuvudtaget, ehuru från början långt efter Englands och Frankrikes, redan efter några årtionden ej blott hann upp dessa länders utan ernådde en fullkomligt världsbehärskande ställning. Orsakerna härtill ha naturligtvis varit flera, men en av dem ligger i patentlagstiftningens olikhet i England och Frankrike å ena sidan och i Tyskland å den andra. I de båda förstnämnda länderna är nämligen själva industri*produkten* patentskyddad. Om alltså en firma lyckats framställa ett visst färgämne, så får sedan ingen annan firma framställa detta. Det lönar sig således ej för konkurrenter att söka nya och billigare metoder, ty ingen annan firma än den, som innehar patentet, får överhuvudtaget tillverka produkten. I Tyskland äro förhållandena helt andra. Där är det framställnings*metoden*, som skyddas av patentet. Om ett bolag har patent på en metod att framställa en viss färg, så står det alla andra fritt att söka nya, bättre och billigare metoder för framställning av samma färg och att, om detta lyckas, i sin tur få dessa metoder patenterade för sin räkning. Det är utan vidare klart, att den tyska patentlagstiftningen verkar direkt pådrivande på forskningen, medan däremot den i England och Frankrike tillämpade bromsar utvecklingen.

En annan orsak torde ligga däri, att färgämnesindustrien i ovanligt hög grad kräver en rent vetenskapligt högkvalificerad

personal. För att överhuvudtaget realisera den utveckling, vilken patentlagstiftningen gynnar, är oavlåtlig vetenskaplig forskning absolut nödvändig. Men en dylik samvetsgrann och outtröttlig verksamhet tycks ligga för det tyska kynnet och den har också gynnats genom de tyska läroverkens och universitetens inställning. I England har däremot ända fram till kriget kemisk forskning ansetts för en ej riktigt nobel sysselsättning, vilken för en gentleman på sin höjd kunde tolereras som ett utslag av excentricitet. Både i England och Frankrike har det sega fasthållandet vid uppfostran efter klassiska linjer säkerligen motverkat uppkomsten av en klass vetenskapligt skolade tekniska kemister. Sålunda säger Tilden i sin »Chemical Discovery and Invention in the Twentieth Century»: »In the middle of last century there were no laboratories for practical work in any of the British universities and chemistry was not a subject which led up to a degree. At Cambridge the professor of chemistry was a country clergyman who came up once a year to give a course of lectures.»

Det mest sensationella resultatet av tysk forsknings trägna mödor på färgämnesområdet var framställningen av konstgjord indigo. 1880 lyckades det Adolf von Baeyer att finna en metod härför. Men det behövdes ytterligare sjutton år av oavlåtligt arbete, innan man fann en tekniskt användbar lösning av problemet. Först år 1897 kunde Badische Anilin börja utsändandet av konstgjord indigo i marknaden. Det är allmänt bekant, att framställningen av konstgjord alisarin och indigo verkade fullständigt revolutionerande på näringslivet inom stora områden — t. ex. i Frankrike och i Indien — där krapp eller indigo varit bland jordbrukets huvudprodukter. Medan 1896—97 mer än en och en halv million acres i Brittiska Indien upptogos av indigoodling, tog denna odling tio år senare endast 400 tusen acres i anspråk.

Vid sidan om dessa särskilt slående resultat finna vi emellertid andra av i grund och botten större betydelse. Dit hör i första rummet upptäckten av sambandet mellan kemisk konstitution och färgegenskaper. Man fann, att ett organiskt ämne för att överhuvudtaget vara färgat måste innehålla vissa bestämda atomgrupper (kromoforer). Färgens art och intensitet bestämdes av dessa kromofora gruppers antal och läge i molekylen samt av eventuell jonisering av föreningen. Med stöd av dessa erfarenheter kunde man alltså, utgående från ett visst färgämne, målmedvetet arbeta fram andra av liknande art men i alla önskade nyanser. Man fann på detta sätt tusentals färgämnen: trifenylmetanfärger, t. ex. fuksin, azofärger, t. ex. metylorange, antracenfärger, t. ex. alisarin, indigofärger samt diverse andra huvudgrupper. Efter hand som

åren gingo, stego anspråken på färgerna och speciellt sökte man få dem dels alltmera lysande och mättade, dels allt mera *äkta*, d. v. s. motståndskraftiga mot särskilt solljusets blekande verkan. I dessa avseenden ha särskilt indanthren- och helindonfärgerna — av vilka de förra tillhöra antracen-, de senare indigogruppen — visat sig fylla även mycket högt ställda anspråk.

Det oavlåtliga, målmedvetna strävandet i de tyska färgämneslaboratorierna ledde till glänsande framgång. Denna var ej mindre på det ekonomiska än på det vetenskapliga området. Under 1800-talets sista decennier, då Tysklands näringsliv liksom dess politiska makt befann sig i ständig utveckling, steg även dess kemiska industri i en brant kurva mot höjden. Badische Anilin, som 1865 sysselsatte 30 arbetare, hade 1905 en arbetsstyrka på när 7 000 man. Exporten av konstgjorda färger från Tyskland steg från 8 tusen ton år 1880 till 65 tusen ton år 1904. I samma mån som produktionen steg, sjönko priserna. 1874 kostade ett kilo rosanilinblått 56 Mark, 1900 endast 8 Mark. Ett kilo alisarin betalades 1881 med 17:50 Mark; år 1900 hade priset sjunkit till 1:— Mark.

Under tiden gåvo fabrikerna stadigt utdelningar, vilka förefalla nästan fantastiska. Under åren 1887—1904 gåvo såväl Badische Anilin som fabrikerna i Höchst i genomsnitt en utdelning av 23 procent och Bayer kom ej långt efter. Att under sådana förhållanden diverse nya företag växte upp inom branschen, är ej att undra på. Sålunda grundades 1873 Aktiengesellschaft für Anilinfabrikation i Berlin, bekant för alla, som syssla med fotografering, under namnet Agfa. Den redan 1861 grundade Chemische Fabrik J. W. Weiler und Co. i Köln-Ehrenfeld sammanslogs med den 1877 startade Farbwerke Dr. E. ter Meer und Co i Uerdingen (vid vänstra Rhenstranden, ett par mil norr om Düsseldorf) till firman Chemische Fabriken vormals Weiler-ter Meer. Likaledes genom förening av ett par äldre företag bildades 1898 firman Chemische Fabrik Griesheim-Elektron i Frankfurt a. M. Jämte dessa funnos åtskilliga andra, bland vilka särskilt förtjäna nämnas Leopold Casella und Co. i Frankfurt a. M. och Kalle und Co. i Biebrich. Alla, utom Agfa, lågo — och ligga alltjämt — vid Rhen eller någon av dess bifloder. Orsaken härtill är ej svår att utleta. Materialet kunde här framskaffas med billiga flodfrakter och ett för fabrikationen oerhört viktigt ämne fanns i obegränsade kvantiteter: vattnet. Redan omkring sekelskiftet behövde Badische Anilin bortåt 70 tusen kubikmeter vatten pr dag, medan vid samma tid för hela staden Köln endast åtgingo 40 tusen kubikmeter om dagen. Sedan dess har naturligtvis fabrikernas vatten-

behov vuxit till ännu mycket större belopp. Vid 1920-talets början uppgick det för Badische Anilin till den häpnadsväckande mängden av 800 tusen kubikmeter pr dag.

Utvecklingen av färgämnesindustrien ledde emellertid ej blott till att allt flera och allt billigare färgämnen framställdes i allt större kvantiteter. I själva fabrikationens natur låg en tendens att utveckla sig över även helt andra områden av kemisk teknologi. Det är sålunda klart, att fabrikerna redan från början sökte att i möjligaste mån själva framställa de kemikalier: syror, alkalier, klor o. s. v., vilka voro behövliga vid färgämnesframställningen. Men härifrån var steget ej långt till fabrikation även av andra produkter. Sålunda ledde alkaliframställningen helt naturligt in på elektrolytisk industri, svavelsyrefabrikationen — inom parentes var det för Badische Anilins räkning, som Knietsch gjorde de undersökningar, vilka resulterade i uppfinningen av den s. k. kontaktmetoden för svavelsyreframställning — förde till superfosfatframställning och därmed till intresse för gödningsmedel överhuvudtaget, fabrikationen av kemikalier för fotografiskt bruk kom snart även inom ramen för tillverkningen o. s. v. Av alldeles särskilt intresse blev tillverkningen av läkemedel. Bayer började med fabrikationen av fenacetin, fabrikerna i Höchst med antipyrin och därefter utvecklades denna gren av verksamheten vid såväl dessa fabriker som Badische Anilin i allt snabbare tempo. Aspirin, pyramidon, veronal och novocain äro bland de mest bekanta produkterna av denna verksamhet. Germanin mot sömnsjuka, plasmodin mot malaria och salvarsan mot syfilis ha nått världsrykte. De nämnda substanserna utgöra dock endast en försvinnande liten bråkdel av det ofantliga antal läkemedel, som färgämnesfabrikerna framställa.

Det är tydligt, att med den nyss skisserade våldsamma utvecklingen av fabrikerna konkurrensen snart skulle göra sig märkbar och medföra ytterligare prissänkningar och risk för minskad utdelning. Vi ha redan sett, huru prisen föllo till bråkdelen av de ursprungliga och det blev snart tydligt för företagens ledande män, att denna tendens kunde mötas endast genom överenskommelser och sammanslutningar i prisreglerande syfte. Möjligheten härtill var så mycket större som antalet enskilda företag i branschen alltid varit ganska litet, vartill kom, att bland dessa företag ett fåtal hade en fullkomligt behärskande ställning, nämligen 1. Badische Anilin- und Sodafabrik, 2. Färgverken i Höchst, 3. Bayer, 4. Casella och 5. Agfa. Sammanslutningssträvandena stärktes också av tanken på utländsk konkurrens, vilken givetvis kunde mötas med större framgång ju starkare de inhemska före-

tagen voro. Redan på 1880-talet hade mera tillfälliga överenskommelser ingåtts mellan de olika fabrikerna i syfte att hålla priserna på speciellt alisarin och indigo uppe. Framgången var dock ej stor. I mera markant form realiserades dessa idéer först 1904. Den, som vid denna tid synes ha kraftigast verkat för sammanslutningstankens realiserande, var Carl Duisberg, en färgkemist, som stigit till ledare för fabriken Bayer. Duisberg ville redan nu, att alla färgfabrikerna skulle förena sig till en enhet. Tiden var dock ännu ej mogen för en så radikal konsolidering. Vad man lyckades ernå, var sammanslutning dels mellan färgverken i Höchst och Casella, dels mellan Badische Anilin, Bayer och Agfa. Dessa samgåenden skedde i form av vad man i Tyskland kallar »Interessen-Gemeinschaft», vilket innebär, att de särskilda företagen behålla en viss grad av självständighet men ha gemensam överledning, det s. k. delegationsrådet, vilket reglerar hela produktionen och försäljningen.

Genom de sålunda skedda sammanslagningarna blev färgämnesindustriens ställning oerhört stärkt. Utdelningarna stego vissa år ända till 30 procent och de olika företagen började skaffa sig ett allt starkare inflytande även över råvaruproduktionen och lade sig exempelvis till med egna kolgruvor.

Efter konsolideringen kunde även den viktiga del av verksamheten, som bestod i rent vetenskaplig forskning, erhålla än bättre möjligheter och den bedrevs nu med ständigt ökad intensitet. Den kom efterhand att inriktas på områden, vilka låg helt och hållet utanför företagens ursprungliga intressesfär. Det problem, som här trädde starkast i förgrunden stod i nära samband med den redan nämnda tendensen hos företagen att skaffa sig kontroll även över råvarorna. På detta område mötte nämligen en dittills oöverkomlig svårighet. För framställning av de nödiga kväveföreningarna var man alltjämt beroende av chilesalpetern. Visserligen gåvo ju samma fabriker, som lämnade tjäran, gasverken, även ammoniak, men vad man behövde var framför allt salpetersyra. Även om man kunde finna ett sätt att framställa denna ur ammoniaken, var den mängd av den senare, som erhölls från gasverken, ej på långt när tillräcklig för fabrikernas behov, i synnerhet som den ju även behövdes såsom gödningsmedel. Vad det gällde var att söka tvinga det fria kvävet i luften att ingå förening med andra grundämnen och på så sätt få fram vad man önskade. I början av 1900-talet lyckades det samtidigt norrmännen Birkeland och Eyde och tysken Schönherr att finna praktiskt användbara metoder härför, så att salpetersyra kunde framställas direkt ur luften. Schönherrs metod utarbetades i Badische Anilins

behov vuxit till ännu mycket större belopp. Vid 1920-talets början uppgick det för Badische Anilin till den häpnadsväckande mängden av 800 tusen kubikmeter pr dag.

Utvecklingen av färgämnesindustrien ledde emellertid ej blott till att allt flera och allt billigare färgämnen framställdes i allt större kvantiteter. I själva fabrikationens natur låg en tendens att utveckla sig över även helt andra områden av kemisk teknologi. Det är sålunda klart, att fabrikerna redan från början sökte att i möjligaste mån själva framställa de kemikalier: syror, alkalier, klor o. s. v., vilka voro behövliga vid färgämnesframställningen. Men härifrån var steget ej långt till fabrikation även av andra produkter. Sålunda ledde alkaliframställningen helt naturligt in på elektrolytisk industri, svavelsyrefabrikationen — inom parentes var det för Badische Anilins räkning, som Knietsch gjorde de undersökningar, vilka resulterade i uppfinningen av den s. k. kontaktmetoden för svavelsyreframställning — förde till superfosfatframställning och därmed till intresse för gödningsmedel överhuvudtaget, fabrikationen av kemikalier för fotografiskt bruk kom snart även inom ramen för tillverkningen o. s. v. Av alldeles särskilt intresse blev tillverkningen av läkemedel. Bayer började med fabrikationen av fenacetin, fabrikerna i Höchst med antipyrin och därefter utvecklades denna gren av verksamheten vid såväl dessa fabriker som Badische Anilin i allt snabbare tempo. Aspirin, pyramidon, veronal och novocain äro bland de mest bekanta produkterna av denna verksamhet. Germanin mot sömnsjuka, plasmodin mot malaria och salvarsan mot syfilis ha nått världsrykte. De nämnda substanserna utgöra dock endast en försvinnande liten bråkdel av det ofantliga antal läkemedel, som färgämnesfabrikerna framställa.

Det är tydligt, att med den nyss skisserade våldsamma utvecklingen av fabrikerna konkurrensen snart skulle göra sig märkbar och medföra ytterligare prissänkningar och risk för minskad utdelning. Vi ha redan sett, huru prisen föllo till bråkdelen av de ursprungliga och det blev snart tydligt för företagens ledande män, att denna tendens kunde mötas endast genom överenskommelser och sammanslutningar i prisreglerande syfte. Möjligheten härtill var så mycket större som antalet enskilda företag i branschen alltid varit ganska litet, vartill kom, att bland dessa företag ett fåtal hade en fullkomligt behärskande ställning, nämligen 1. Badische Anilin- und Sodafabrik, 2. Färgverken i Höchst, 3. Bayer, 4. Casella och 5. Agfa. Sammanslutningssträvandena stärktes också av tanken på utländsk konkurrens, vilken givetvis kunde mötas med större framgång ju starkare de inhemska före-

tagen voro. Redan på 1880-talet hade mera tillfälliga överenskommelser ingåtts mellan de olika fabrikerna i syfte att hålla priserna på speciellt alisarin och indigo uppe. Framgången var dock ej stor. I mera markant form realiserades dessa idéer först 1904. Den, som vid denna tid synes ha kraftigast verkat för sammanslutningstankens realiserande, var Carl Duisberg, en färgkemist, som stigit till ledare för fabriken Bayer. Duisberg ville redan nu, att alla färgfabrikerna skulle förena sig till en enhet. Tiden var dock ännu ej mogen för en så radikal konsolidering. Vad man lyckades ernå, var sammanslutning dels mellan färgverken i Höchst och Casella, dels mellan Badische Anilin, Bayer och Agfa. Dessa samgående skedde i form av vad man i Tyskland kallar »Interessen-Gemeinschaft», vilket innebär, att de särskilda företagen behålla en viss grad av självständighet men ha gemensam överledning, det s. k. delegationsrådet, vilket reglerar hela produktionen och försäljningen.

Genom de sålunda skedda sammanslagningarna blev färgämnesindustriens ställning oerhört stärkt. Utdelningarna stego vissa år ända till 30 procent och de olika företagen började skaffa sig ett allt starkare inflytande även över råvaruproduktionen och lade sig exempelvis till med egna kolgruvor.

Efter konsolideringen kunde även den viktiga del av verksamheten, som bestod i rent vetenskaplig forskning, erhålla än bättre möjligheter och den bedrevs nu med ständigt ökad intensitet. Den kom efterhand att inriktas på områden, vilka låg helt och hållet utanför företagens ursprungliga intressesfär. Det problem, som här trädde starkast i förgrunden stod i nära samband med den redan nämnda tendensen hos företagen att skaffa sig kontroll även över råvarorna. På detta område mötte nämligen en dittills oöverkomlig svårighet. För framställning av de nödiga kväveföreningarna var man alltjämt beroende av chilesalpetern. Visserligen gåvo ju samma fabriker, som lämnade tjäran, gasverken, även ammoniak, men vad man behövde var framför allt salpetersyra. Även om man kunde finna ett sätt att framställa denna ur ammoniaken, var den mängd av den senare, som erhölls från gasverken, ej på långt när tillräcklig för fabrikernas behov, i synnerhet som den ju även behövdes såsom gödningsmedel. Vad det gällde var att söka tvinga det fria kvävet i luften att ingå förening med andra grundämnen och på så sätt få fram vad man önskade. I början av 1900-talet lyckades det samtidigt norrmännen Birkeland och Eyde och tysken Schönherr att finna praktiskt användbara metoder härför, så att salpetersyra kunde framställas direkt ur luften. Schönherrs metod utarbetades i Badische Anilins

tjänst och även de väldiga norska anläggningarna vid Notodden, Rjukan m. fl. platser råkade snart inom de tyska färgfabrikernas intressesfär. Bägge metoderna hade dock en mycket bestämd nackdel: de krävde alldeles för stora energibelopp i förhållande till de producerade mängderna salpetersyra. Att denna energi måste tillföras i form av elektriska urladdningar gjorde saken ännu sämre, ty Tyskland är ju ej rikt på vattenfallsenergi och anläggningarna måste alltså huvudsakligen förläggas till andra länder.

Kompressionspumpar för gasblandningens (väte + kväve + koldioxid) sammanpressning före koldioxidens borttagande. Oppau.

På grund härav slog man sig ej till ro med de vunna resultaten. Det blev Fritz Haber, som löste problemet att på ett mera ekonomiskt och framför allt av tillgång till vattenfallsenergi oberoende sätt binda luftkvävet. De avgörande resultaten av Habers rent vetenskapliga arbete på detta område nåddes omkring 1908, då han klarlagt möjligheten att framställa ammoniak direkt ur elementen. Det krävdes emellertid sedan ett under flera år bedrivet segt arbete av Haber och Badische Anilins tekniske chef, Carl Bosch, för att göra metoden tekniskt användbar och ytterligare finna möjligheter att på ekonomiskt tillfredsställande sätt framställa salpetersyra ur ammoniaken. Sommaren 1913 började den första fabriken för ammoniaksyntes enligt Haber-Boschs metod att arbeta i Oppau, ett par kilometer norr om Ludwigshafen. Denna fabrik har sedan undan för undan utvidgats och producerar f. n. kväveföreningar i en mängd, som motsvarar 100 tusen ton rent kväve om året.

En annan viktig upptäckt i detta sammanhang var möjligheten att framställa det till gödning mest använda ammoniumsaltet, sulfatet, ur ammoniumkarbonat och gips. Härigenom slapp man att för detta ändamål framställa svavelsyra. Då gips finnes inom Tysklands gränser, men råmaterialet för svavelsyrefabrikationen

Torn för gasrening.
Ammoniakfabriken i Leunawerke, Merseburg.

däremot måste importeras, betydde det nya framställningssättet givetvis en nationell vinst.

Och så kom kriget. Dess verkningar voro, vad färgämnesfabrikerna angick under de första åren snarast av gynnsam art. Ty det från tillförsel utifrån avstängda landet måste med alla

medel upparbeta en inhemsk produktion av varor, som eljest importerats. Vad Haber-Boschs ammoniaksyntes under dessa år betydde för Tyskland, kan väl knappast överskattas. Utan kväveföreningar hade ingen ammunition kunnat fabriceras och ingen kvävegödning tillföras den jord, vars produkter skulle livnära befolkningen. Till fabriken i Oppau kom under dessa år (1917) den väldiga anläggningen i Leuna vid Merseburg och dessa båda fabriker producerade tillsamman sådana mängder kväveföreningar, att den inställda importen mer än ersattes. Även bensol — ur stenkolstjära — blev mycket starkt efterfrågad, då den till en viss grad kunde användas som motorbränsle. Likaså lönade sig under krigsåren framställning av konstgjord kautschuk, vars syntes varit bekant sedan 1909, men som det under normala förhållanden ej lönat sig att framställa. Härtill kommo även en mängd andra mer eller mindre lyckade surrogat för ämnen, vilka förut importerats och slutligen de »Kampfstoffe», vilka under krigets senare år fingo en allt intensivare användning.

Men kriget — och ännu mer efterkrigsåren — hade även dystra verkningar för färgämnesindustrien. Kemiens oerhörda betydelse som nationellt försvars- och kampmedel gick med ett slag upp för ententemakterna och de dröjde ej att vidtaga sina mått och steg med anledning härav. Icke blott avstängdes Tyskland under kriget från all export av den kemiska industriens produkter, utan när kriget var slut, befunnos de gamla kunderna utomlands i stor utsträckning ha gjort sig oberoende av import från Tyskland. De köpte nu i stället från nyanlagda, av tullar väl skyddade, fabriker i det egna landet. Och den, som i våra dagar besöker en engelsk skola, finner ingen brist på intresse för kemiundervisningen.

I denna situation fanns för de tyska färgfabrikerna endast en utväg: att genom ytterligare sammanslutning stärka sin ställning. Så bildade år 1916 Badische Anilin, Bayer (sedan 1912 överflyttad till Leverkusen vid Rhen, strax norr om Köln), färgverken i Höchst, Agfa, Casella, Weiler-ter Meer och Griesheim-Elektron en enda intressegemenskap. Samtliga aktier i Kalle und Co. hade redan 1914 inköpts av fabrikerna i Höchst och nu voro således alla de stora färgämnesföretagen förenade under gemensam ledning. Likväl förblevo de särskilda företagen alltjämt i många avseenden fullt självständiga. Under de närmaste åren indrogos genom köp eller överenskommelser allt flera industrier i den stora koncernen. Kolgruvor, särskilt brunkolsbrytningar, och t. o. m. sockerfabriker inköptes. Genom denna politik liksom genom omläggningen till produktion av sprängämnen och giftgaser kunde färgämnesfabrikerna alltjämt bibehålla en ganska god utdelning, vilken för

flertalet ända till 1917 höll sig vid 18 à 20 procent. Dessa gynnsamma erfarenheter gjorde, att sammanslutningstanken slog fullständigt igenom. Man förstod, att endast en möjligast fast form av samgående skulle kunna ge tillräcklig styrka att bemästra de vidriga förhållanden, vilka mötte efter krigets slut.

Och så ägde då år 1925 den fullständiga fusionen till ett enda företag rum. Detta skedde nominellt i den form, att Bayer, färgverken i Höchst, Agfa, Griesheim-Elektron och Weiler-ter Meer samtliga uppgingo i Badische Anilin, vilket samtidigt ändrade namn och kallade sig »Interessen-Gemeinschaft Farbenindustrie Aktiengesellschaft». Det nya bolagets ledning fick sitt säte i Frankfurt a. M. Aktiekapitalet utgjorde vid sammanslagningen nära 500 millioner guldmark. En egendomlighet vid denna transaktion var, att firmorna Casella och Kalle und Co. icke ingingo i fusionen utan nominellt kvarstodo oförändrade. I själva verket ägde de övriga företagen redan samtliga aktier i Kalle und Co. och aktiemajoriteten i Casella, så att i realiteten tillhöra även dessa företag I. G. Till yttermera visso arrenderar I. G. deras verksamhet!

I det nya bolagets styrelse ingingo helt naturligt de ledande männen i de gamla delföretagen. Ordförande i styrelsen blev Carl Bosch, förut Badische Anilins ordförande, och ordförande i det s. k. »Aufsichtsrat» blev Carl Duisberg, förut ordförande i Bayerverken.

Icke väl hade den väldiga fusionen mellan samtliga ledande färgämnesfabriker ägt rum, förrän det nya bolaget började i sig uppsuga ytterligare företag inom den egna eller närliggande branscher. Så ingingos redan 1926 viktiga överenskommelser med de ledande tyska sprängämnesfabrikerna, bland dem Dynamit-Aktiengesellschaft i Hamburg, ursprungligen en av Alfred Nobels skapelser. För att möjliggöra dessa alltmer omfattande affärstransaktioner ökades aktiekapitalet undan för undan. Även med de viktigaste utländska konkurrentfirmorna, så t. ex. med närmast motsvarande engelska koncern, Imperial Chemical Industries (I. C. I.) och med Standard Oil Company ha betydelsefulla överenskommelser ingåtts.

Dylika internationella överenskommelser nödvändiggjordes av den allt skarpare konkurrensen från icke-tyska företags sida. Sålunda sågo sig de chilenska salpeterintressena — i stor utsträckning representerade av nordamerikanska affärssammanslutningar — givetvis starkt hotade av den alltjämt stegrade produktionen av kväveföreningar ur luften och vidtogo prissänkningar för att möta denna fara. Men även andra länder än Tyskland fabricerade ammoniak ur luftkväve enligt metoder, som påminde om Haber-

Boschs, ehuru de vanligen arbetade med ännu högre tryck (Claudes metod med ända till 1 000 atm., Casales och Fausers 600—800 atm.). Enligt Stat. Jahrb. f. d. Deutsche Reich uppgick 1933 produktionen av »ammoniakkväve» i Frankrike till c:a två femtedelar av Tysklands produktion. En viktig överenskommelse i prisreglerande syfte mellan I. G. och dessa konkurrentföretag samt chilesalpeter-intressenterna utgjorde den 1930 bildade Convention de l'Industrie de l'Azote (C. I. A.), vilken omfattade c:a 80 procent av världsproduktionen av kväveföreningar. Den blev dock ej av lång varaktighet utan upplöstes redan efter ett års förlopp, men ersattes snart av andra, ehuru något mindre omfattande överenskommelser både med de europeiska konkurrenterna och med de chilenska. I detta sammanhang bör kanske nämnas, att det sedan år 1928 även i Sverige finnes en fabrik för framställning av ammoniak ur luftkväve, nämligen vid Ljungaverk i Medelpad, varest årligen produceras c:a 12 tusen ton ammoniumsulfat, varjämte även kalkkväve framställes.

Den rent vetenskapligt sett mest betydelsefulla händelsen i I. G:s utvecklingshistoria efter bolagsbildningen får väl anses vara Bergin-metodens genomförande. Med Berginmetoden menar man det av Friedrich Bergius funna tillvägagångssätt, genom vilket väte i fri form under högt tryck och i närvaro av lämpliga katalysatorer bringas att direkt förena sig med organiska ämnen. De första försöken att tillämpa denna metod i stor skala gjordes 1921 vid en av Badische Anilins fabriker och sedan dess fortsattes försöken oavbrutet och kröntes slutligen med framgång. Sålunda framställas nu genom dylik »hydrering» av de eljest ej särskilt värdefulla brunkolen liksom ur tjära och ur en del i Tyskland producerade naturliga bergoljor stora mängder bensin. I samband härmed ha de redan förut mycket omfattande anläggningarna i Leuna ytterligare utbyggts. Dessa producera både kväveföreningar och bensin. Av de förstnämnda framställdes redan 1928 en mängd, som motsvarade 500 tusen ton rent kväve och produktionen har sedan dess givetvis ytterligare stigit. Enligt en uppgift i Smith-d'Ans Anorganische Chemie uppgick produktionen av enbart ammoniumsulfat ur ammoniumkarbonat och gips vid Leunaverken 1931 till fyra tusen ton om dagen. Framställningen av bensin utgjorde under 1935 300 tusen ton, varav c:a 75 % direkt ur brunkol. Enligt ett uttalande i Svenska Dagbladet för den 13 april detta år av en från Tyskland nyss hemkommen svensk tekniker, beräknas produktionen av bensin vid innevarande års slut komma att täcka 60 % av det inhemska behovet och efter ytterligare ett år hela detta behov. Försöken att framställa smörjoljor

skola däremot enligt samme sagesman ännu ej ha lett till något tillfredsställande resultat.

En annan gren av tillverkningen, på vilken de senaste åren mycket arbete nedlagts, är framställningen av konstsilke och andra textil-råvaror (vistra m. fl.)

Det bör kanske här påpekas, att den av Bergius i Rheinau anlagda fabriken för s. k. »träförsockring» är ett självständigt, från I. G. helt fristående företag. I. G. har icke upptagit framställningen av födoämnen ur trä på sitt program.

De år, som gått, sedan fusionen av färgämnesfabrikerna ägde rum, ha alltså bevittnat en alltjämt fortgående utveckling såväl ekonomiskt som vetenskapligt inom området för I. G:s verksamhet. År 1931 utgjorde antalet arbetare i bolagets tjänst nära 70 000 och antalet tjänstemän 19 000, vartill kommo nära 36 000 anställda vid bolagets gruvor. Aktiekapitalet uppgick samma år till 800 miljoner Mark.

Det ligger nära till hands att fråga sig, om den väldiga koncentration med tillhörande kapitalansamling, som I. G. utgör, betyder ett fullständigt monopol. Så torde nog vara fallet på vissa områden, särskilt då läkemedel och tjärfärger. I varje fall är den inhemska konkurrensen här så gott som borta, vilket säkerligen haft en för konsumenterna föga angenäm verkan på priserna. Men på ett par andra områden har I. G. att även inom eget land möta likvärdiga konkurrenter: kalisyndikatet, sedan länge väl inarbetat i gödningsbranschen, och kolsyndikatet. Och på den utländska marknaden uppväxer en allt starkare konkurrens med likartade företag, vilka precis som I. G. bildats genom väldiga fusioner. Särskilt hävdar sig den kemiska industrien i Förenta staterna (Du Pont och Allied Chemical and Dye Company), men även England (I. C. I.), Frankrike (Kuhlmann-koncernen) och Schweiz se denna industri växa till väldiga dimensioner. Konkurrensen från dessa länder blir allt kännbarare för I. G. och kan mildras endast genom alltmera omfattande internationella överenskommelser, i den mån dylika kunna åvägabringas. Att I. G. klart insett detta och ej är overksam härutinnan, har redan ovan påpekats.

Hur den nya politiska kursen i Tyskland kommer att verka på I. G. får framtiden visa. Kvar står under alla omständigheter, att vi här ha en industri, vilken från en ytterst blygsam början utvecklat sig till ett av världens största företag och att detta skett med rent vetenskaplig kemisk forskning som bärande grund.

---

och angränsande vetenskaper åtnjöt Wallén internationellt anseende. Hans bortgång innebär en svår förlust ej blott för den institution, vars vidsynte ledare han var, utan även för det internationella samarbetet, där han nu var designerad att intaga en ledande ställning.

Atomforskningen, som i våra dagar rent explosionsartat kastar fram de mest häpnadsväckande upptäckter, har ägnats ett par uppsatser av fil. lic. B. Grundström och doc. H. Alfvén, vilket bör tacksamt annoteras. Den förre redogör för en del tvåatomiga molekylers absorption. Olika typer av absorptionsspektra kunna som bekant urskiljas, och av spektras utseende kunna slutsatser dragas om energinivåer och bindningsförhållanden inom molekylen. Speciellt i sådana fall, då en viss grad av aktivering bringar molekylen i instabilt tillstånd och motsvarande emissionslinjer därför ej kunna erhållas, är absorptionsmetoden värdefull. Vid absorptionsprocessen aktiveras nämligen molekylen i allmänhet från lägsta energitillståndet, det s. k. grundtillståndet, till ett högre. Absorptionsspektrum kan därför ge upplysning även om sådana energinivåer, som emissionsspektrum ej förmår avslöja. Så är t. ex. förhållandet vid kalcium- och aluminiumhydrid. För alstrande av det kontinuerliga emissionspektret användes båglampa eller vätgaslampa, ett geisslerrör, som under vissa betingelser ger vätgasens kontinuerliga molekylspektrum. Absorptionskärlet utgöres av en elektrisk ugn, i vilken absorbatorn hålles i ångform vid lämplig temperatur. Alkalimolekylernas spektra ha på denna väg bekvämt kunnat undersökas, ehuru även emissionsmetoden för dem är användbar. Kvicksilvermolekylen har mycket svagt bundna atomer. Den mycket lösa bindningen i grundtillståndet orsakar, att banden bli diffusa — hos alkalimetallerna däremot äro banden skarpa, vilket tyder på fast bindning. Vid ökat tryck och konstant temp. breda kvicksilverångans band ut sig och spektrum blir till sist kontinuerligt. På samma sätt förhålla sig kadmium och zink.

En utmärkt skildring av temperaturområdets senaste utvidgning mot absoluta nollpunkter ger fil. lic. Erik Ingelstan. Med expanderande gaser eller vätskor, som få avdunsta under lågt tryck, når man ej längre ned än till 0,7 grader Kelvin beroende på att ångtrycket ytterst snabbt faller mot noll vid dessa låga temperaturer. Den effekt, med vars hjälp man kan tränga ännu längre ned, är avkylningen vid adiabatisk avmagnetisering. Vid snabb avmagnetisering av t. ex. KCr-alun, vars temperatur på förhand nedbringats till någon grad Kelvin, sker en förhållandevis kraftig temperturs änkning. Vid Leidenlaboratoriet anser man sig

på denna väg ha kommit ned till 0,0044 grader över absoluta nollpunkten. Vid en så låg temp. uppnås fantastiskt högt vakuum. Vid 0,05 gr. K. är heliums tryck exempelvis 4.10^{-62} mm Hg d. v. s. samma som ångtrycket över järn vid rumstemperatur. Förf. redogör även för intressanta arbetsuppgifter inom det nya temperaturområdet. Genom att utnyttja den paramagnetiska kärneffekten för adiabatisk avmagnetisering skulle man kunna tränga ännu längre ned.

Docent Gunnar Hägg bidrager med en uppsats om fasta lösningar med variabelt atomtal i elementarcellen. Det stora flertalet hittills undersökta fasta lösningar kännetecknas av att vissa atomer i kristallgittret ersättas med atomer av annat slag (substitutionslösningar). Antalet atomer i elementarcellen blir då konstant. Man har emellertid även lyckats framställa fasta lösningar, där atomer inlagrats i mellanrummet mellan atomerna i ett givet gitter (aditionslösningar) Ett tredje slags lösning erhålles t. ex. av S löst i FeS; den kan enklast förklaras genom antagande, att järnatomer subtraheras från vissa gitterpunkter (subtraktionslösningar). De båda sista typerna kallas med ett gemensamt namn mellanrumslösningar. Förf. redogör för villkoren för deras uppkomst. Mellanrumslösningen kan vara åtföljd av samtidig substitution eller valensändring. Då svavel löses i FeS, är det t. ex. troligt, att tvåvärda järnatomer efter vartannat övergå i trevärda. Den härigenom orsakade ökningen av positiv laddning kompenseras av att vissa av de ursprungliga järnatomlägena bli tomma. Uppsatsen avslutas med en intressant redogörelse för elektriska ledningsförmågan hos icke-metalliska mellanrumslösningar.

Elektrolyternas fysikaliska egenskaper ha under senaste årtiondena varit föremål för en mängd undersökningar. Arrhenius teori har måst modifieras och utbyggas. Hänsyn måste tagas till de mellan jonerna verkande elektriska krafterna, som bl. a. åstadkomma, att varje jon är omgiven av ett moln joner av motsatt slag. Antages elektrolyten fullständigt dissocierad, ha Debye och Hückel visat, att experimentellt och teoretiskt funna värden för osmotiskt tryck och aktivitet utmärkt väl överensstämma för utspädda starka elektrolyter.

De nya föreställningarna om tillståndet i elektrolyter ha givit upphov till en livlig experimentell och teoretisk forskning inom skilda grenar av dissociationsteorien. Doc. Erik Larsson har upptagit några huvudproblem till behandling i en enkel och klar form. Bland dem vill jag här blott omnämna teorien för elektriska ledningsförmågan. En jon med tillhörande moln rör sig i ett svagt elektriskt fält långsammare fram än om jonen vore fri; jonmolnet

blir därvid osymmetriskt. Fri är jonen endast i oändligt utspädd lösning. Ledningsförmågan blir alltså även vid fullständig dissociation mindre ju högre koncentrationen är. Jonerna äro även omgivna av genom elektriska laddningen orienterade vattenmolekyler, vilka även verka hämmande på rörelsen. I mycket starka fält (100 kV per cm.) få jonerna däremot så stor hastighet, att jonmolnen slitas sönder och jonerna vandra med samma hastighet som i oändligt utspädda lösningar. I växelfält av låg frekvens bör osymmetri hinna utbildas i jonmolnet under varje halvperiod, i högfrekvent fält däremot icke. Därför bör ekvivalentledningsförmågan stiga med frekvensen. De experimentella resultaten bekräfta dessa slutsatser.

Gränsen för den noggrannhet varmed fysikens tredje grundenhet, sekunden, reproduceras sättes av tvenne faktorer: felgränsen inom vilken primärenheten, stjärndygnet, är tillgängligt för iakttagelse samt av den noggrannhet varmed ett precisionsur kan dela det härur härledda medelsoldygnet i 86 400 lika delar. Fil. mag. Tryggve Johansson beskriver i en artikel om moderna precisionsur utvecklingen fram till våra dagar, där höjdpunkten nås av Shorturet, ett dubbelpendelur, och kvartsuret, vars viktigaste del är ett stycke piëzokvarts (elastisk egenfrekvens omkring 60 000 herz), som styr en högfrekvensanläggning. Ett påtagligt bevis för de förra urens utomordentliga prestationsförmåga utgör den iakttagelsen, att månens med dess läge på himlen ändrade attraktion på pendeln tydligt kunde iakttagas i urens gång. Vid absolutbestämning av 1 sekund resp. 1 dygn medelst kvartsuren äro felgränserna 0,00001 resp. 0,001 sek.

Prof. H. Norinder skriver om sina undersökningar av blixtens urladdningsegenskaper. Variationerna i elektriska fältet under urladdningen ha studerats med horisontalantenn, magnetiska fältets variation med ramantenner. Efter svaga förurladdningar följa starka delurladdningar genom någon av förurladdningarna preparerad väg. Tiden för en delurladdning sträcker sig från några få till ett femtiotal milliondels sekunder. Tiden mellan första och sista delurladdningen kan i genomsnitt sättas till 2 à 3 tusendels sek. Strömstyrkans max.-värde är vanligen 20 à 40 kiloamp., men stiger i vissa fall över 100 kA. Elektricitetsmängden, som pr delurladdning passerar blixtbanan, har av Norinder aldrig iakttagits överstiga 2 coulomb.

Det efter anmälarens mening ojämförligt bästa bidraget till föreliggande årgång av Kosmos är doc. Hannes Alfvéns såväl till innehåll som form utmärkta framställning av några drag ur kärnfysiken. Jag vill särskilt omnämna, att förf. gjort sig mödan

förse sin uppsats med hänvisningar till arbeten i föregående band av Kosmos, varför många läsare säkerligen bli honom tack skyldiga. Uppsatserna i Kosmos skulle otvivelaktigt vinna i värde, om bidragsgivarna försåge sina framställningar med hänvisningar ej blott till de av dem använda vetenskapliga källorna, dit dock endast ett fåtal läsare vända sig, utan till allmänt använda, sammanfattande arbeten. Då formler medtagas, böra ingående storheter definieras, likaså beteckningar i figurer förklaras.

Alfvén för oss in på det nyaste området av fysiken. Han ger först en återblick på de arbeten, som ledde till upptäckten av neutronen och positronen, som numera jämte elektron, proton och foton (ljuskvantum) äro att räkna som elementarpartiklar. Positronens existens har ända till 1932 varit okänd. Detta beror på att dess livslängd är kort, ty så snart som den kolliderar med en elektron, förintas den, samtidigt förintas även elektronen. Vid dematerialisationen utstråla från det ställe, där kollisionen ägde rum, antingen två γ-kvanta på vardera 0,5 miljoner elektronvolt eller ett γ-kvantum på 1 million elektronvolt. Man känner även processens omvändning. Om en mycket hård γ-strålning (över en million elektronvolt) passerar en tung atomkärna, kan ett tvillingpar bestående av en elektron och en positron uppstå ur intet. Atomkärnan tjänar blott som katalysator.

Ett viktigt avsnitt handlar om kärnreaktionerna. Här går förf. i tur och ordning igenom de olika reaktionsmetoderna: beskjutning med α-partiklar, protoner och deutoner, neutroner samt γ-strålning. En mängd belysande typexempel på dylika reaktioner ges. Särskilt kan nämnas deutonbeskjutningen av tungt väte. Vid denna kunna två olika reaktioner inträda. Vid den ena bildas »tritium», väte med atomvikten 3, jämte en proton, vid den andra en heliumisotop med atomvikten 3 jämte en neutron. De nu säkert kända kärnreaktionerna finnas sammanförda i en tabell över mer än tre sidor.

Förf. övergår därefter till de radioaktiva, genom syntes framställda nya isotoperna. Har den radioaktiva kärnan mindre massa än motsvarande stabila isotop, utsändes positron; är massan större utsändes elektron. Två nya radioaktiva grundämnen med numren 93 och 94, alltså större än urans, ha framställts genom neutronbombardemang av uran. Deras existens torde nu få anses bevisad.

Den verkligt innehållsrika uppsatsen avslutas med några sidor ägnade de teoretiska spekulationerna över kärnornas struktur.

M. Sjöström.

Oskar Klein, *Orsak och verkan i den nya atomteoriens belysning.* Natur och kultur, Stockholm 1935, 125 sid., häft. kr. 2:25, inb. kr. 3:—.

Boken innehåller tre radioföredrag med därtill anknytande diskussioner mellan tre tänkta åhörare, Elias, Peter och Tomas, av vilka Elias är väl insatt i den nya fysiken, de övriga ganska frågvisa och oppositionslystna. I första föredraget ger förf. en hastig överblick över materiens byggnad, radioaktiviteten, Mendelejeffs system, atomnumrets betydelse (Moseley ej nämnd) och Bohrs program för atomfysiken. I den därpå följande diskussionen får Elias tillfälle att utfylla framställningen med upplysningar om sådana projektiler som neutroner och positiva elektroner, om konstgjord radioaktivitet, om lagarna för värmestrålningen m. m. Nästa föredrag går närmare in på Bohrs teori; diskussionen kommer slutligen att röra sig om den interferensbild, som uppstår på en skärm, sedan ljuset passerat ett litet hål i en därmed parallell skärm, samt om ljuskvanta och Heisenbergs obestämdhetsrelation. Man väntar sig här från de oppositionella den invändningen, att man i det ögonblick, då en enstaka ljuskvant träffar den förstnämnda skärmen, får kännedom om såväl kvantens läge som dess med skärmen parallella impulskomponent, vilken invändning skulle ha gjort diskussionen ännu intressantare. I tredje och sista avdelningen utvecklas de åskådningar, som kunna sägas komma till uttryck i vågmekaniken, samt Bohrs tankar rörande fysikens lagar och livsproblemen.

Av detta korta referat framgår, att bokens innehåll är synnerligen rikhaltigt. Författarens framställningssätt är som alltid livfullt och lättfattligt. Boken kan därför med utbyte läsas av såväl lekmannen som den fackbildade.

Till sist ett par mindre väsentliga reservationer. Lekmannen kan vid sitt studium av boken lätt förledas till att underskatta insatserna från flera betydande forskare, som jämte Bohr arbetat på atomteoriens utveckling. Här och där skulle man önska en större precision i författarens uttryck, och någon gång anför han till sin förmån argument, som logiskt sett icke stå i nivå med det övriga.

D. Enskog.

C. Bergholm, *Lärobok i fysik.* Allmän fysik. Andra fullständigt omarbetade uppl. J. A. Lindblads förlag, Uppsala 1936, 64 sid., kr. 2:—.

Den nya kursplanen för fysiken på realgymnasiet medförde särskilt beträffande den allmänna fysiken avsevärda inskränk-

ningar, varigenom de förut använda läroböckerna kommo att innehålla mycket utöver kursen. Nya upplagan av Moll-Rudbergs lärobok beredde oss lärare en stor besvikelse, när den utkom 1934 utan att någon märkbar hänsyn tagits till nya kursplanen och anvisningarna i samband med denna. Lektor Wetterblad har i sin recension i denna tidskrift (sid. 59, 1935) bl. a. påtalat detta.

Med oblandad tillfredsställelse konstateras att Bergholms lärobok helt ansluter sig till kursplanens och anvisningarnas föreskrifter och att förra upplagans 111 sidor nu blivit 64, d. v. s. föga mer än hälften.

Omarbetningen av första upplagan är fullständig. Så återfinnes ingen av denna upplagas figurer i oförändrad form. De nya figurerna liksom de, som ersatt de gamla, äro alla stora och tydliga samt utförda med omsorg. Även texten är fullständigt omarbetad, så att man måste söka efter likheter mellan upplagorna.

Man observerar säkerligen med gillande, att Bergholm placerat geostatiken sist, medan början göres med detta område av kursen i förra uppl. och nya uppl. av Moll-Rudbergs lärobok.

Behandlingen av hydrostatiska trycket och av Pascals princip måste anses särskilt förtjänstfull. Sedan en enkel apparat angivits för att visa, att trycket är lika stort i alla riktningar, behandlas, i olikhet med vad som brukar vara fallet i våra läroböcker, hydrostatiska trycket före Pascals princip. Denna senare härledes därpå enkelt och naturligt som en tillämpning av hydrostatiska trycket.

Liksom i senaste upplagan av Moll-Rudbergs lärobok användes tryck endast i betydelsen kraft per ytenhet. Däremot har den i Moll-Rudberg nyinförda benämningen tryckkraft som beteckning på den av vätskan utövade kraften på en godtycklig yta undvikits, och man ser, att detta kan ske utan svårighet.

I aerostatiken finnes den nyinförda internationella enheten millibar definierad. Barografen som en självregistrerande aneroidbarometer klargöres genom en åskådlig figur. Nyinförd är en utvidgning av Boyles lag: vid konstant temperatur är produkten av volymen och trycket dividerad med gasmassans vikt konstant. Denna lag är naturligtvis mycket användbar, men nödvändig är den ej och kunde därför medtagas tryckt med mindre stil.

Geostatiken behöver numera ej bereda eleverna några större svårigheter särskilt icke i den här givna framställningen. I ett exempel i samband med hävstången behandlas Westphals våg, som säkert förtjänar att uppmärksammas i skolfysiken, då den dels ger synnerligen noggranna värden på vätskors spec. vikt

och dels är en tankeväckande tillämpning av de behandlade lagarna.

Kapitlet om mediers motstånd mot rörelsen ger den enkla och givande framställning av dessa problem, som kursplanen säkerligen avsett.

Framställningen i de olika kapitlen kompletteras förtjänstfullt av 99 räkneexempel. Ett par anmärkningar i samband med dessa: i ex. 24 spelar hydrostatiska trycket in, om hålet ej är gjort i övre sidoytan; i ex. 62 bör stigrör ersättas med sugrör samt anges, att 4 m är rörets längd över vattenytan; i ex. 70 är snörets användning något oklar.

Det finns naturligtvis en del, mot vilket man vill reservera sig. Personligen är jag minst nöjd med att förf. tycks vilja införa täthet (»vikten i gram av en cm^3 av ämnet») i stället för spec. vikt (»förhållandet mellan vikten av en viss volym av ämnet och vikten av samma volym vatten vid + 4° C»). Förf. börjar nämligen med att definiera tätheten och anmärker mot spec. vikten i en not, att vattnet är olämpligt som jämförelsesubstans efter upptäckten av tungt vatten. Dessutom anges i tabell fasta, flytande och gasformiga ämnens täthet, ej deras spec. vikt, som eljest är brukligt. Visserligen anges, att tätheten och spec. vikten numeriskt äro lika och därför utan missförstånd kunna användas jämsides, men äro de bägge begreppen definierade i läroboken, reagerar läsaren, då spec. vikten på sid. 21 och 35 erhålles genom att dividera vikten med volymen. Jag finner det enklare och bättre, om i en skollärobok uteslutande användes begreppet spec. vikt, som är så inarbetat i svenskt språkbruk, att det bör bibehållas. Lämpligt är måhända, att dels definiera spec. vikten som förhållandet mellan vikten av en viss volym av ämnet och vikten av samma volym vanligt vatten vid + 4° C och dels som det tal, som anger vikten av motsvarande volymsenhet.

Om vattenstrålpumpen anges, att den ej kan minska trycket under 5 mm Hg. Bättre vore väl att ange, att man vid vanlig vattenledningstemp. med denna kommer ned till c:a 15 mm Hg.

Som totalomdöme kan sägas, att Bergholm givit oss en klar framställning av den allmänna fysiken med utrensning av allt överflödigt lärostoff och med berömvärd koncentration kring det väsentliga. Vi fysiklärare äro tacksamma härför och motse med intresse lärobokens övriga delar.

Helge Stolt.

Hjalmar Olson, *Algebra för latingymnasiet,* ny omarb. uppl. Svenska Bokförlaget, Stockholm 1936. *Första delen,* för det 4-åriga gymnasiets första ring: algebra, geometri, planimetri, stereometri, 64 sid., kr. 2:40. *Andra delen,* för det differentierade gymnasiet: algebra, geometri, planimetri, trigonometri, 76 sid., kr. 3:20.

Denna nya upplaga företer väsentliga skiljaktigheter gentemot sina förgångare. Undervisningsplanerna av år 1933, som ju för ämnet matematik på latingymnasiet inneburit såväl en minskning i antalet lärotimmar med därav följande inskränkning i kursomfånget som även en omläggning av vissa kursmoment, ha sålunda föranlett vissa uteslutningar och omflyttningar i läroboken. Å andra sidan har läroboken kompletterats, så att den nu omfattar latingymnasiets hela matematikkurs.

Lektor O:s författarskap har redan tidigare sträckt sig till skilda områden av skolans matematikkurs. När förf. nu riktat ifrågavarande lärobok med vissa kursmoment, så har detta av allt att döma, utom beträffande kap. om trigonometri, skett därigenom, att han inarbetat brottstycken ur vissa övriga läroböcker. Sålunda synes den samling satser om trianglars likformighet, som nu införts i såväl första som andra delen, att vara ett urval ur Nyström-Olson, *Likformighetslära för gymnasiet,* under det att kap. om andragradsfunktionen är hämtat ur förf:s lärobok *Funktionslära för gymnasiet.* Då förf:s framställningssätt torde vara väl känt från nämnda läroböcker, finns icke anledning att här orda därom. Må det vara nog sagt, att urvalet av satser och övningsexempel synes vara gjord med säker blick, för vad som bör genomgås och vad som kan medhinnas, utan att inkräkta på den tid, som rimligen bör anslås till andra kursmoment.

I kap. »Trigonometri», som ingår i andra delen, ges en klar och naturlig framställning av trigonometriens definitioner och de enklaste satserna. Sammanlagt ett 80-tal räkneuppgifter beledsaga framställningen.

Beskärningar i kursomfånget ha gjorts inom så gott som samtliga områden av kursen. Dock ha de företagits med en viss återhållsamhet, och i ett par fall har behållits även sådant, som icke finnes upptaget i kursplanen. Så t. ex. behandlas fortfarande aritmetriska serier, ehuru i minskad omfattning, och under det att kap. om logaritmer uteslutits, upptager bokens andra del ett avsnitt »Rötter och potenser», för att, såsom förf. säger i sitt företal, möjliggöra bekvämt uträknande av numeriska uttryck med hjälp av 10-potenser. Anmälaren räknar det som en bestämd förtjänst,

att detta kap. medtagits. Ty enligt den erfarenhet, han hittills hunnit få av undervisning i det diff. latingymnasiet enligt gällande undervisningsplan, medgiver tiden väl genomgående av kap. ifråga. Och nyttan för eleverna av de härvid förvärvade kunskaperna för det fortsatta studiet torde vara oomtvistlig.

Kapitlen om algebraiska reduktioner, vilket område enligt kursplanen skjutits över till det diff. gymnasiet, ha förts över från första delen till den andra. En kort repetitionskurs inleder dock den första delen såsom förberedelse för behandlingen av ekvationer av 1. graden.

Såsom totalomdöme om innehållet kan man säga, att den erforderliga gallringen bland lärostoffet gjorts med god urskillning och att de olika kursmomenten givits omfång, väl avvägda sinsemellan och med hänsyn till det åt ämnet anslagna timantalet. Andra delen bör mycket väl kunna medhinnas i det diff. gymnasiet. Första delen är måhända något drygt tilltagen, men uteslutningar kunna göras, därest tiden så fordrar. Förf. har i sitt företal också givit anvisningar i sådan riktning.

Typografiskt sett erbjuder boken samma prydliga utseende som tidigare. Uppställningen är redig, figurerna klara och tydliga. Tidigare tryckfel ha bortarbetats; det har dock tyvärr icke kunnat undvikas, att ett och annat nytt insmugit sig i deras ställe.

Utan tvivel tillhör läroboken det bästa, som litteraturen har att bjuda inom ifrågavarande område.

Nils Sundberg.

Petersson og Ring: *Uorganisk Kemi for Mellemskolen.* Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag. København 1936, 50 sid., kr. 1:50.

Boken börjar med framställningen av syre och väte, varefter studeras oxider, såsom vatten och koldioxid, varvid som reagens på det förra användes koboltpapper. Framställningen av svaveljärn studeras kvantitativt, luftens syrehalt bestämmes med kopparpulver. Efter en översiktlig tabell över några grundämnen behandlas i korthet några viktiga metalloider samt kvantitativa reaktioner till införande av det kemiska teckenspråket. Sulfider, syror och baser studeras, varvid som reaktion på syror även användes gasutvecklingen vid tillsats av soda. Viktiga metallsalter behandlas i tillbörlig omfattning, varvid magnesium konsekvent benämnes magnium (men aluminium ej analogt härmed alumin!). Ammoniak, mineral, hårt vatten samt några få kolföreningar avsluta kursen.

Som lärobok för svensk realskolas första årskurs synes boken, trots dess knapphet, i hög grad förebildlig, dess klara och logiska framställning är av hög kvalitet, illustrationerna äro instruktiva och väl utförda. Ett 80-tal experiment, varav en del utföras av eleverna, samt rikligt med frågor och återblickar bidraga att göra kursen konkret och kunskaperna fasta.

Anmälaren använde under sin skoltid vid Uppsala läroverk såsom föreskriven lärobok en norsk bok i stereometri utan att språket vållade svårighet. Vore det otänkbart att vid något av våra läroverk denna utmärkta danska bok infördes i kemi? Vad säger föreningen Norden härtill?

E. Nordefeldt.

Bolin-Gustaver, *Handledning i kemisk analys för elementära skolor.* Tidens förlag 1936. 71 sid. + atomviktstabell; kr. 1:50.

Denna handledning är i första hand avsedd för de av gymnasiets elever, vilka inhämtat metalloidernas och metallernas kemi. Den omfattar två huvuddelar: kvalitativ analys och titreranalys.

I den första delen redogöres för igenkänningsreaktioner vid undersökning av ämnen på torra vägen samt undersökning av de vanligaste pos. och neg. jonerna i lösningar. Därefter följer analysgång för sammansatta prov, vilken något förenklats med hänsyn till vissa av förf. föreslagna prov av praktiskt intresse såsom metallegeringar, tekniska preparat och läkemedel. Sista avdelningen av denna del innehåller en utredning av de principer, varpå utfällningen av elektrolyter är baserad.

Framställningen är genomgående klar och instruktiv. De föreslagna proven synas väl valda, möjligen med undantag för prov 4, grupp 1, där aluminium och magnesium samtidigt förekomma och prov 6 i samma grupp, vilket innehåller strontium, en metall, som förefaller umbärlig i en för skolbruk avsedd handledning. Den teoretiska avdelningen är mycket förtjänstfullt skriven och de utförda beräkningarna bidraga i hög grad att underlätta förståelsen för de för skolpojkar tämligen svårtillgängliga begreppen löslighetsprodukt och dissociationskonstant.

Några detaljer må påpekas. — Det på sid. 10 (sid. 21) angivna provet på Si med fosforsaltpärlan är som bekant relativt otillförlitligt. Tyvärr finns det icke ett absolut säkert, enkelt prov på kiselsyra. Bäst är att blanda provet med lika mängd kalciumfluorid samt några droppar konc. svavelsyra i en liten blydegel och uppvärma lindrigt under det man håller en vattendroppe på en glasstav i de utvecklade ångorna. Vid närvaro av kiselsyra

fås ett vitt beslag kring vattendroppen; $3\,SiF_4 + 2\,H_2O = 2\,H_2SiF_6 + SiO_2$. Om ett ännu bättre utförande av detta prov se E. H. Riesenfeld, Anorg.-chem. Praktikum. — Den vid inledning av H_2S i kvicksilver(2)salter (sid. 13) observerade vit-gul-bruna fällningen består ej av HgS utan av »svavelbasiska salter». — Kaliumbikromat fäller ur blysalters lösningar gul $PbCrO_4$ (ej gulröd $PbCr_2O_7$); behandlad med natronlut övergår fällningen i en röd, olöslig substans, som utgöres av basiskt blykromat, $nPbO,\ CrO_3$ ($n = 1, 2, 3$). — På sid. 26 påstås, att den utvecklade vät*gasen* utreducerar Sb och Sn, då i en saltsyresur lösning zink införes i beröring med platina. Förloppet tolkas väl rätteligen sålunda: zink och platina bilda tillsammans med elektrolytlösningen ett galvaniskt element, vars neg. pol, *anoden*, utgöres av zinken och pos. pol, *katoden*, av platina. Vid anoden är förloppet: $Zn \rightarrow Zn^{\cdot\cdot}$, under det att vid katoden reaktionerna $Sb^{\cdot\cdot\cdot} \rightarrow Sb$, $Sn^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \rightarrow Sn$ äga rum. Bättre är att här i stället för zink—platina använda en blank järnspik, varvid antimon utfälles på spiken, under det att $SnCl_4$ reduceras till $SnCl_2$, som kvarstannar i lösningen. — På sid. 27 vid »egentlig analys» bör föreskrivas att provet skall göras *svagt* alkaliskt med ammoniak. — Sid. 28, mom. 5, innehåller föreskriften att för påvisande av Zn en del av filtratet skall *mättas* med H_2S. Detta är felaktigt, endast några blåsor H_2S skola inledas. Vid mättning kan nämligen även Al utfällas såsom $Al(OH)_3$.

Bokens andra huvuddel, titreranalysen, omfattar neutralisationsreaktioner, oxidations- och reduktionsreaktioner samt fällningsreaktioner. Den sista avdelningen, »teori», behandlar P_H-begreppet, buffertlösningar och indikatorer.

Även om denna del gäller, att den är väl avfattad. De talrika analysuppgifterna synas i stort sett mycket lämpliga. I den teoretiska delen kunde man kanske önska, att — för vinnande av större åskådlighet vid redogörelsen för syrors och basers bestämning genom titrering — några titreringskurvor hade ingått.

Ett par småsaker må påpekas: K_v (sid. 67, rad 1) plägar benämnas vattnets *jonprodukt*. — Termen aktivitetsfaktor som benämning på α (sid. 68) bör utgå och ersättas med (det inom parentes stående) dissociationsgrad.

Som totalomdöme kan sägas, att denna handledning är ett gott arbete, som, även om man ej medhinner att i större utsträckning använda den vid klassundervisning, dock bör vara ett välkommet hjälpmedel vid det enskilda arbetet i kemi.

Nils Wigren.

Gradualavhandlingar.[1]

Otto Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions* (Meddelanden från Lunds universitets matematiska seminarium t. 3 (1935), p. 1—118). Disp. i Lund $^{7}/_{12}$ 1935. Opponenter: prof. M. Riesz och prof. G. Hössjer.

Huvuddelen av föreliggande avhandling är ägnad åt potentialteorien, en mindre del (kap. VIII) åt vissa tillämpningar inom teorien för de analytiska funktionerna, vilka i huvudsak tidigare publicerats av förf. i ett par smärre arbeten i Fysiogr. Sällsk. i Lund förh. och i Stockholmskongressens förh. 1934.

Begreppet massfördelning i rymden definieras som en fullständigt additiv mängdfunktion och massans potential som en Stieltjes-Lebesgue-Radon-integral bildad med denna funktion. Dessa och andra grundläggande begrepp behandlas i avh:s första kap. I nästa kap. angripes så efter en del förberedande hjälpsatser det centrala jämviktsfördelningsproblemet, d. v. s. problemet att fördela en given positiv massa på en konduktor, så att potentialen i varje punkt på och inuti denna får ett konstant värde. Förf. betraktar f. ö. redan från början ett godtyckligt antal konduktorer men förutsätter att deras ytor uppfylla vissa regularitetsvillkor, så att det som fysiskt kan betecknas som »spets»-verkan uteslutes. Den sökta jämviktsfördelningen av en given massa bevisas vara identisk med den massfördelning på konduktorn, vars energi är minimum. Denna princip, så naturlig från fysikalisk synpunkt, har angivits redan av Gauss, vilken även sökt använda den till ett matematiskt hållbart bevis. Det visar sig, att man vid beviset för jämviktspotentialens existens icke behöver till fullo utnyttja den vanliga (newtonska eller logaritmiska) potentialens harmoniska egenskaper. Fastmer föres beviset omedelbart för en klass av generaliserade potentialer karakteriserad av att den newtonska kärnan $1/r$ (i rymden) är ersatt med den allmännare $1/r^{\alpha}$, där α är en godtycklig reell exponent belägen i intervallet $1 \leqq \alpha < 3$.

Med jämviktspotentialen för en konduktor sammanhänger naturligt begreppet kapacitet. I kap. III diskuterar förf. detta begrepp från olika synpunkter, och kapaciteten definieras för en godtycklig mängd som en sorts inre mått, självfallet beroende av exponenten α. Normeringen är gjord så, att måttet är lineärt. I besittning av kapacitetsbegreppet kan förf. generalisera jämviktS-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

teoremet till att gälla godtyckliga slutna mängder, varvid man dock måste bortse från en eventuell undantagsmängd av kapacitet noll, där potentialen ej antar det föreskrivna konstanta värdet. Denna generalisering behandlas i kap. IV, i vilket man även finner en kortfattad exposé över förhållandena i planet och den logaritmiska potentialen. I kap. V visas, hur en något modifierad variationsprincip, ävenledes härrörande från GAUSS, kan användas för att nå fram till den metod som man med POINCARÉ brukar kalla »méthode du balayage». I sammanhang härmed bevisas en maximumprincip för potentialer, som enkelt kan formuleras så: en potential av positiva massor når sitt maximum i en punkt i massan. Med hjälp av nämnda variationsmetod erhåller man även direkt den GREENska funktionen för ett godtyckligt område, här definierad som potential av en viss massfördelning och följaktligen bestämd i varje punkt av rymden. Kap. VI ansluter sig till det föregående med en kort redogörelse för olika frågor i samband med DIRICHLETS problem. Förf. visar direkt, att de s. k. irregulära punkterna på randen bilda en mängd av kapacitet noll, en sats som i sig innehåller det s. k. KELLOGG'S lemma. I följande kap. studeras speciellt mängder av kapacitet noll samt kapacitetsmåttets relation till de s. k. HAUSSDORFFska måtten. Det visas, att en sluten mängds dimension i HAUSSDORFFS mening även kan definieras med hjälp av denna mängds kapacitet för olika värden av exponenten α.

I sista kap. givas som förut nämnts vissa tillämpningar på funktionsteoretiska problem. Bland dessa må nämnas den av förf. uttalade satsen, att de defekta värdena (enligt NEVANLINNAS terminologi) till en meromorf funktion bilda en mängd av logaritmisk kapacitet noll (d. v. s. kapacitet noll i avseende på den logaritmiska potentialen). En analog sats gäller, som visas, för en speciell klass av regulära begränsade funktioner i enhetscirkeln, om det NEVANLINNASKA defektbegreppet på lämpligt sätt modifieras.

BIRGER GRUNDSTRÖM, *Spektroskopische Untersuchungen über die Erdalkalihydride.* Stockholm 1936. 95 sid. Disp. vid Stockholms Högskola 18 maj 1936. Opponenter: professor ERIK HULTHÉN och fil. lic. GÖSTA W. FUNKE.

Den totala energin i en molekyl är uppdelad på ett flertal energiformer, vilka delvis kunna undersökas spektroskopiskt. Det har härvid visat sig lämpligt att i första hand skilja mellan tre slag av energi: elektron-, kärnsvängnings- och rotationsenergi. I vissa mer eller mindre aktiverade elektrontillstånd uppstå på grund av

atomkärnornas inbördes svängningar en rad diskreta energinivåer, kärnsvängningsnivåer, vilka konvergera mot en gräns, som uppnås, då kärnsvängningsamplituden blivit så stor, att kärnorna avlägsna sig från varandra. Denna gräns kallas molekylens dissociationsgräns i ifrågavarande elektrontillstånd.

Om den totala energin hos en molekyl i två olika elektrontillstånd uppgår till samma belopp, kunna de båda tillstånden komma i växelverkan, resonans, med varandra. Det föreligger då en möjlighet för molekylen att strålningslöst övergå från det ena tillståndet (I) till det andra (II), vilket kan medföra, att molekylen i det förstnämnda tillståndet bringas till dissociation, innan den av kärnsvängningskonvergensen betingade, »naturliga» dissociationsgränsen är uppnådd. Ett sådant förlopp har av sin upptäckare Henri kallats för *predissociation*, och det kan undersökas spektroskopiskt, ifall det störda tillståndet I samtidigt ger upphov till strålningsprocesser genom övergång till ett tredje elektrontillstånd (III), som ej har samma totala energi.

Molekylens livslängd i tillståndet I blir då beroende av tvenne övergångssannolikheter: sannolikheten för den strålningslösa överövergången I→II och sannolikheten för en övergång I→III under strålning. Den först nämnda sannolikheten kan i gynnsamma fall bli så stor, att molekylens livslängd endast uppgår till $^1/_{1000}$ av den normala (10^{-8} sek.), d. v. s. den, som endast är beroende av strålningsdämpningen. I överensstämmelse med Heisenbergs osäkerhetsrelation $\triangle W . \tau \sim \frac{h}{2\pi}$ (τ betyder här molekylens livslängd i ett tillstånd med den totala energin W; $\triangle W$ är detta tillstånds oskärpa; h = Plancks konstant) motsvaras den förminskade livslängden av en diffus utbredning av energinivåerna i tillståndet I. De till övergången I→III svarande strålningsprocesserna ge upphov till spektra, vilka på grund av molekylernas nedsatta livslängd i tillståndet I uppvisa plötsliga avbrott i spektrallinjeserierna. Den omvända strålningsprocessen I←III motsvaras av spektra, som karakteriseras av en rad diffusa spektrallinjer svarande mot den ovan omtalade oskärpan av energinivåerna i tillståndet I. Övergången I→III undersökes enklast med emmissions- och övergången I←III med absorptionsspektra.

I föreliggande avhandling ha båda metoderna begagnats, varvid dock absorptionsmetoden i främsta rummet kommit till användning. Undersökningarna ha avsett ett studium av predissociationen hos några hydrider tillhörande andra gruppen i periodiska systemet: MgH, CaH, SrH och BaH. Vid emmissionsundersökningarna användes en vacuumljusbåge, som brann i vätgas av varie-

rande tryck, från 20 mm Hg upp till 7 atm. De härvid erhållna spektra fotograferades under hög dispersion med hjälp av ett 6,5 m konkavgitter (disp. i första ordn. 2 Å/mm). Den för absorptionsundersökningarna erforderliga experimentella utrustningen utgöres främst av en vacuumugn för höga temperaturer. Värmeelementet i ugnen består av ett grafitrör (längd 250, yttre diam. 25 och gods $1\,^3/_4$ mm), vilket vid en belastning av 750A och 20V ger en temperatur på 2100°C. I röret placerades den metall, vars absorptionsspektrum man vill undersöka. Som kontinuerlig ljuskälla användes inom det långvågiga spektralområdet ned till 3000Å temperaturstrålningen från en volframbandlampa eller vanliga överbelastade billampor. Inom det ultravioletta området användes det kontinuum, som utsändes från ett geisslerrör med en vätgasfyllning av ung. 2 mm tryck. Ugnen fylles med vätgas av $\sim$ 500 mm tryck, och grafitröret värmes till $\sim$ 1400°C. Då den kontinuerliga strålningen härvid passerar genom röret, erhålles metallens och metallhydridens spektrum i absorption, vilket därefter fotograferades med en kvartsspektrograf eller med ett plangitter (disp. i första ordn. 5 Å/mm).

Ur dessa spektra har författaren erhållit en detaljerad bild av predissociationsförloppet hos nämnda hydrider, bl. a. har en av Kronig på teoretisk väg härdledd formel för bredden av predissocierade spektrallinjer kunnat för första gången kvantitativt prövas. Ur kännedomen om predissociationen kunna vidare viktiga slutsatser dragas beträffande molekylernas dissociationsprodukter i de mer eller mindre aktiverade elektrontillstånden.

Växelverkan mellan tvenne elektrontillstånd yttrar sig ej endast genom predissociation. Ett ännu vanligare hithörande fenomen utgöres av de s. k. *störningarna,* vilka karakteriseras därav att spektrallinjerna äro förskjutna ur sina normala lägen. Inom alkalihydridernas spektra finnas talrika tillfällen att studera dessa störningar och deras beroende av det inbördes läget av de varandra störande energitillstånden.

Föreläsningar för lärarekandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1935—36.[1]

Göteborg: lektor A. Björkeson, Om växelström och elektriska svängningar; lektor E. Möller, Historik över bestämning av de relativa atomvikternas storhetsordning.
Stockholm: lektor E. Ramstedt, Den metodiska behandlingen av den moderna atomfysiken; lektor A. Wahlgren, Om empiriskt införande av logaritmer; adjunkt S. Åstrand, Om periodläsning i matematik och fysik; adjunkt C. Rendahl, Försök på växelströmsläran; lektor M. Sjöström, Behandlingen i skolkursen av lagarna för luft- och rörelsemotstånd; lektor E. Jönsson, Experimentell behandling av vissa delar av elektricitetsläran; lektor G. Starck, Demonstration av nyare laborations- och lektionsförsök i kemi; lektor E. Nordefeldt, Kemiundervisningens metodik; adjunkt O. Moberg, Undervisning i kartprojektioner.
Uppsala: lektor G. Bolinder, Om matematikundervisningen på gymnasiet; adjunkt K. Lenander, De nya metodiska anvisningarna i matematik; lektor B. Eriksson, Om läroverkets lokaler för undervisning i fysik i gymnasiet (övning); adjunkt P. Granath, Om läroverkets lokaler för undervisning i fysik i realskolan (övning).

Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser 1935—36.[1]

H. Tegnér, *Zur Berechnung der Anzahl der Lösungen einer diophantischen Gleichung.* Vasa realskola, Stockholm (12 sid.).

[1] Uppgifterna ha godhetsfullt lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska avdelning.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

846) *Sök vinklarna i den största av de i en given cirkel inskrivna trianglar, i vilka en vinkel är 60° större än en annan.*

Stig Comét.

847) *Hur många reella rötter har ekvationen*

$$x^2 + 2x - \log\left(x^2 + 2x + \frac{5}{4}\right) = 0?$$

(log betecknar naturliga logaritmen).

Stig Comét.

848) *Mot en sida i en triangel dragas höjden, bissektrisen och medianen. De skära triangelsidan i punkterna H, B och M resp., vilka ej sammanfalla. Sök gränsvärdet av förhållandet mellan sträckorna HM och BM, då triangeln tenderar att bli liksidig.*

Stig Comét.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

849) Beräkna y, då $y = \sin x + \sin^2 x = \cos^2 x + \cos^4 x$.

Svar: 1 eller 0.

850) Lös ekvationen

$$(1 + 2\cos x) \cdot \cos(x - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: $180° + n \cdot 360°$; $80° + n \cdot 120°$.

851) I en oändlig geometrisk serie är kvoten $= \sin 2x$ och andra termen $= \sin 4x$. Bestäm x så, att seriens summa blir 4.

Svar: $x = 18°{,}43 + n \cdot 180°$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 849—854, 859, 862, 863 äro insända av *X.*; 855, 856 av *B. E. N.*; 857, 858 av *P. E. Lundin*; 860, 861 av *S. B.*

852) I fyrhörningen $ABCD$ är diagonalen AC bissektris till vinkeln A, som är 60°, samt medelproportional till AB och AD. Därjämte är $AB - AD = AC$. Bestäm vinkeln B.

Svar: Man får $\cot B = \sqrt{5} - \sqrt{3} + 1$; $B = 33°{,}62$.

853) Visa, att för varje triangel ABC gäller

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0.$$

854) I triangeln ABC är AM median. Visa, att

$$\cot \sphericalangle CAM - \cot \sphericalangle MAB = 2 \cot \sphericalangle AMB.$$

855) I den liksidiga triangeln ABC äro P, Q och R punkter på resp. sidorna AB, BC och CA. Linjerna AQ, BR och CP avgränsa en triangel. Bestäm dess yta, om $AP = BQ = CR = \frac{AB}{3}$.

Svar: $\frac{1}{7}$ av den ursprungliga triangelns yta.

856) Omkretsen av ett paralleltrapets är $2p$. Två vinklar äro 60°. Angiv maximivärdet av trapetsets yta.

Svar: $\frac{p^2\sqrt{3}}{8}$.

857) Bestäm vinklarna i en rätvinklig triangel med konstant hypotenusa, om produkten av höjden mot hypotenusan och ena katetprojektionen skall bli ett maximum.

Svar: 30°, 60° och 90°.

858) En lantbrukare vill inhägna ett rektangulärt område med ståltrådsnät både upptill (tak) och på sidorna, så att stängslet överallt blir 2 m högt. Han har till sitt förfogande 442 m nät av 2 m bredd. Hur stor är den största yta, som kan inhägnas?

Svar: 676 m².

859) Sök den största spetsiga vinkel, som en tangent till kurvan $3y(x^2 + 1) = 8$ kan bilda med kurvans asymptot.

Svar: 60°.

860) Bestäm a i ekvationen $y = ax(x - 1)(x - 2)$ så, att funktionskurvans normal i origo blir tangent.

Svar: $a = \pm\sqrt{2}$.

861) I rektangeln $ABCD$ är $AB = 5$ cm och $BC = 2$ cm. Bestäm på AB en punkt P, så att produkten av PC och PD blir ett minimum.

Svar: $PA = 4$ eller 1 cm.

862) En liksidig kons mantelyta delas i tre lika delar av två plan genom samma generatris. Hur stor är vinkeln mellan dessa plan?

Svar: 67°,38. ($\cos v = \frac{5}{13}$).

863) Två parallella plan med avståndet 2 cm utskära en klotskiva i ett klot. Bestäm skivans volym, om det plan, som går mitt emellan de givna, utskär en cirkel med ytan 1 dm²?

Svar: $200 - \frac{2\pi}{3} = 197{,}91$ cm².

Lösningar till uppg. 809—811.

809) *I en storcirkel på ett klot med radien R är inskriven en triangel, vars inskrivna cirkel har radien r. Beräkna radien i det klot, som tangerar triangelns tre sidor och det ursprungliga klotet.*

X.

Det sökta klotet (radie $= x$) har sin medelpunkt på den normal, som i den inskrivna cirkelns medelpunkt uppreses mot triangelns plan. Medelpunktens avstånd från detta plan blir $\sqrt{x^2 - r^2}$. Enl. Pytagoras sats och Eulers sats om avståndet mellan de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter i en triangel ($= \sqrt{R(R-2r)}$) erhålles

$$(R-x)^2 = (x^2 - r^2) + (R^2 - 2Rr), \text{ varav } x = r + \frac{r^2}{2R}.$$

C.-E. Fröberg.

Även löst av *B. Lindwall* och *S. L.*

810) *Vilka värden kan en treradig, symmetrisk determinant antaga, vars alla tvåradiga huvudminorer äro = 0, och vars huvudelement äro a, b och c resp.? a, b och c äro givna, positiva tal.*

Stig Comét.

Determinanten är av formen $\Delta = \begin{vmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{vmatrix}$,

där x, y och z bestämmas av förutsättningen:

$$ab - x^2 = 0;\ ac - y^2 = 0;\ bc - z^2 = 0.$$

Alltså: $x = \varepsilon_1 . \sqrt{ab};\ y = \varepsilon_2 . \sqrt{ac};\ z = \varepsilon_3 . \sqrt{bc},$

där ε_1, ε_2 och $\varepsilon_3 = +1$ eller -1.

Emedan $a > 0$, så är $a = \sqrt{a^2}$; p. s. s. $b = \sqrt{b^2}$ och $c = \sqrt{c^2}$. Härav följer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{a^2}; & \varepsilon_1\sqrt{ab}; & \varepsilon_2\sqrt{ac} \\ \varepsilon_1\sqrt{ab}; & \sqrt{b^2}; & \varepsilon_3\sqrt{bc} \\ \varepsilon_2\sqrt{ac}; & \varepsilon_3\sqrt{bc}; & \sqrt{c^2} \end{vmatrix} = \sqrt{abc} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{a}; & \varepsilon_1\sqrt{b}; & \varepsilon_2\sqrt{c} \\ \varepsilon_1\sqrt{a}; & \sqrt{b}; & \varepsilon_3\sqrt{c} \\ \varepsilon_2\sqrt{a}; & \varepsilon_3\sqrt{b}; & \sqrt{c} \end{vmatrix} =$$

$$= abc \cdot \begin{vmatrix} 1; & \varepsilon_1; & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1; & 1; & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2; & \varepsilon_3; & 1 \end{vmatrix} = abc\,(1 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2) =$$

$$= 2\,abc\,.\,(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - 1).$$

Detta uttryck är $= \begin{cases} 0, \text{ om } \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 = +1. \\ -4abc, \text{ om } \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 = -1, \end{cases}$

De enda värden, Δ kan antaga, äro alltså 0 och $-4\,abc$.

Stig Comét.

Även löst av *C.-E. Fröberg* och *S. L.*

811) *Ellipsen* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *och cirkeln* $x^2 + y^2 = r^2$ *äro givna. Bestäm maxima och minima av längden hos den inom ellipsen belägna delen av en rörlig tangent till cirkeln,* $(a > b > r)$.

Stig Comét.

Cirkeltangentens ekvation är under normalformen:

$$x\cos\delta + y\sin\delta - r = 0.$$

Skärningspunkterna $(x_1; y_1)$ och $(x_2; y_2)$ mellan denna linje och ellipsen bestämmas genom elimination. Så fås:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cot^2\delta}{b^2}\right) - 2x\,.\,\frac{r\cos\delta}{b^2\sin^2\delta} + \frac{r^2}{b^2\sin^2\delta} = 1,$$

och med beteckningen $N = a^2\cos^2\delta + b^2\sin^2\delta$ blir

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2r\cos\delta}{N}; \quad x_1\,x_2 = \frac{a^2(r^2 - b^2\sin^2\delta)}{N}.$$

Längden l av det inom ellipsen belägna tangentstycket beräknas ur:

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2\,(1 + \cot^2\delta) = \frac{(x_1 - x_2)^2}{\sin^2\delta} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1\,x_2}{\sin^2\delta} = 4a^2b^2\,.\left(\frac{1}{N} - \frac{r^2}{N^2}\right) = 4a^2b^2\,.\,f(\delta).$$

Vi söka nu max. och min. av funktionen

$$f(\delta) = \frac{1}{N} - \frac{r^2}{N^2}.$$

$$\therefore\ f'(\delta) = \left(-\frac{1}{N^2} + \frac{2r^2}{N^3}\right) \cdot 2(b^2 - a^2) \sin\delta \cos\delta,$$

som blir $= 0$ i följande fall:

1) $\sin\delta = 0$, som ger $l = l_1 = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$; $\parallel y$-axeln.

2) $\cos\delta = 0$, som ger $l = l_2 = 2\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - r^2}$; $\parallel x$-axeln.

3) $N = 2r^2$; $\therefore\ a^2\cos^2\delta + b^2\sin^2\delta = 2r^2\cos^2\delta + 2r^2\sin^2\delta$;

$\therefore\ \cot\delta = \pm\sqrt{\frac{2r^2 - b^2}{a^2 - 2r^2}}$, som ger $l = l_3 = \frac{ab}{r}$.

I de tre fallen blir:

1) $f''(\delta) = -2\cdot(a^2 - b^2)\cdot\frac{2r^2 - a^2}{a^6}$ $\begin{cases} > 0, \text{ om } a^2 > 2r^2, \\ < 0, \text{ om } a^2 < 2r^2. \end{cases}$

2) $f''(\delta) = +2\cdot(a^2 - b^2)\cdot\frac{2r^2 - b^2}{b^6}$ $\begin{cases} > 0, \text{ om } 2r^2 > b^2, \\ < 0, \text{ om } 2r^2 < b^2. \end{cases}$

3) $f''(\delta) = -\frac{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2\delta\cos^2\delta}{2r^6} < 0.$

Fallet 3) kan emellertid endast inträffa, om $2r^2 - b^2$ och $a^2 - 2r^2$ båda ha samma tecken, d. v. s. (på grund av $a > b$), endast om $a^2 > 2r^2 > b^2$.

Resultatet kan sammanfattas sålunda:

I. $2r^2 > a^2$: Fall 1) ger $l_{\max} = l_1$; fall 2) ger $l_{\min} = l_2$.

II. $a^2 > 2r^2 > b^2$: Fall 1) ger $l_{\min} = l_1$; fall 2) ger $l_{\min} = l_2$; fall 3) ger $l_{\max} = l_3$.

III. $b^2 > 2r^2$: Fall 1) ger $l_{\min} = l_1$; fall 2) ger $l_{\max} = l_2$.

Anm: I gränsfallet $2r^2 = a^2$ blir $l_{\max} = l_1 = l_3$; $l_{\min} = l_2$. I det andra fallet $2r^2 = b^2$ blir $l_{\min} = l_1$; $l_{\max} = l_2 = l_3$.

Stig Comét.

Även löst av *B. Lindwall, C.-E. Fröberg* och *S. L.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti 1936.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. På en halvcirkel AB väljes en punkt C så, att kordan AC är dubbelt så lång som kordan BC. Beräkna förhållandet mellan längderna av cirkelbågarna AC och BC.
2. I triangeln ABC är $AB = 12$ cm, $BC = 20$ cm och vinkeln $A = 60°$. Huru stor vinkel bildar bissektrisen till vinkeln A med sidan BC?
3. En fader insätter vid sin dotters födelse i bank 300 kr. och sedan samma belopp varje födelsedag med föreskrift, att beloppet får lyftas tidigast, då dottern fyller 21 år. Huru stort belopp har dottern då att lyfta, om insättning sista gången skett, när dottern fyllde 18 år och man räknar med 3 % ränta på ränta?
4. Ett parallelltrapets, vars parallella sidor äro 8 m och 12 m, delas genom de båda diagonalerna i fyra trianglar. Sök förhållandet mellan dessa trianglars ytor.
5. På en diameter i en cirkel väljes en punkt A, som delar diametern i förhållandet 1 : 3, och genom A drages en korda, som i A delas i förhållandet 3 : 4. Beräkna vinkeln mellan diametern och kordan.
6. I ett likbent parallelltrapets (de båda icke parallella sidorna lika stora), som är omskrivet kring en cirkel med radien r, delas en av de icke parallella sidorna av tangeringspunkten i två delar, som förhålla sig som 1 : 4. Beräkna trapetsets yta.
7. I en triangel ABC är vinkeln $A = 33°{,}9$. Bissektrisen till vinkeln A råkar BC i punkten D så, att $BD : DC = 5 : 4$. Beräkna de återstående vinklarna i triangeln.
8. Räta linjen $y = x + a$ och kurvan $4x^2 - 5y^2 = 20$ ha en enda punkt gemensam. Huru stor är a?

Resultat: 1. 2,388. 2. 61°,31. 3. 8 234 kr. 4. 4 : 6 : 6 : 9. 5. 75°,52. 6. $5r^2$. 7. 53°,02 och 93°,08. 8. $a = \pm 1$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

a) *1933 års undervisningsplan.*

1. Bestäm tre tal så, att deras summa är $= a$, att det mellersta av dem är aritmetiska mediet till de båda andra samt att det mellerstas kvadrat är medelproportional till de båda andras kvadrater.
2. I triangeln ABC är M mittpunkten av BC. AB är dubbelt så lång som AC, och vinkeln CAM är tre gånger så stor som vinkeln BAM. Beräkna vinkeln BAC.
3. Till kurvan $y = x^2 - 2x - 1$ drages en korda genom de punkter på densamma, vilkas x-koordinater äro resp. $+2$ och -2. Bestäm ekvationen för den med kordan parallella tangenten till kurvan samt avståndet mellan kordan och tangenten.
4. I en regelbunden tresidig pyramid är varje baskant $= a$ och varje sidokant $= b$. Bestäm avståndet mellan mittpunkten av en baskant och mittpunkten av motstående sidokant.
5. $ABCD$ är en i en cirkel inskriven fyrhörning. AB är 8,1 dm och AD 6,8 dm. Diagonalen AC bildar med AB vinkeln 21°,3 och med AD vinkeln 52°,6. Beräkna AC.
6. A och B äro två punkter, vilkas avstånd är a. Med B som medelpunkt uppritas en cirkel med radien x. C är tangeringspunkten för den från A dragna tangenten. Beräkna x så, att den koniska yta, som AC beskriver vid figurens rotation kring AB, blir så stor som möjligt.
7. En person önskar i slutet av juli 1936 köpa en obligation å nominellt 5 000 kr. löpande efter 5 % ränta, vilken utbetalas halvårsvis den $^{30}/_{6}$ och $^{31}/_{12}$. Det kan beräknas, att obligationen blir inlöst till sitt nominella belopp i slutet av år 1942. Vad bör personen betala för obligationen, om han vill ha 4 % ränta på sitt utlagda kapital och räntan tänkes bli kapitaliserad vid varje halvårs slut?
8. I en triangel med sidorna a, b och c äro r_a och r_b radierna till de vid sidan a resp. sidan b vidskrivna cirklarna. Bevisa, att triangeln är rätvinklig, om $r_a + r_b = c$.
9. Genom origo drages en rät linje, som (utom i origo) skär kurvan $y = x^2 - \frac{1}{3}x^3$ i A och B. Sök ekvationen för linjen, om kurvans tangenter i A och B äro vinkelräta.

Resultat: 1. $\frac{a}{3}(1-\sqrt{2})$; $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{3}(1+\sqrt{2})$ eller alla tre $= \frac{a}{3}$. 2. 120°.
3. $2x + y + 1 = 0$; avståndet $= \frac{4}{\sqrt{5}}$. 4. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. 5. 9,48 dm. 6. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.
7. 5 302 kr. 9. $x - 3y = 0$.

b) *1928 års undervisningsplan.*

Uppgifterna 1, 3—7, 9 utgjordes av motsvarande uppgifter a).

2. Er ellips och en cirkel ha samma medelpunkt. Cirkellinjen går genom ellipsens brännpunkter. Brännpunktsradierna från en av de punkter, i vilka de båda kurvorna skära varandra, förhålla sig som 3 : 4. Beräkna vinklarna i den fyrhörning, som bildas av de gemensamma tangenterna till ellipsen och cirkeln.
8. Genom en punkt P på en liksidig hyperbel drages tangenten, och på denna avsättes från P i båda riktningarna sträckor, PA och PB, lika med avståndet mellan P och den bortre brännpunkten C. För vilket läge på P blir ytan av triangeln ABC den minsta möjliga?

Resultat: 2. 23°,08 och 156°,92. 8. I parameterns ändpunkt.

Uppgifter i fysik.

Obs. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen, sid. 16.

1. En smal, jämntjock och homogen stav av 60 cm längd och 400 g vikt är i ett vertikalplan rörlig omkring en invid stångens ena ända A befintlig, horisontell axel. Den andra ändan B uppbär en vikt av 800 g. Staven hålles i horisontell ställning av ett snöre CD. Punkten C ligger rakt över A på avståndet 40 cm, punkten D är stavens tyngdpunkt. Beräkna storleken av den kraft, med vilken staven trycker mot den horisontella axeln vid A. Friktionen lämnas utan avseende.
2. Ett flygplan rör sig med en hastighet av 30 m/sek snett uppåt i rätlinig bana och har därvid att övervinna ett luftmotstånd å 150 kgf. Motorns effekt är 200 hästkrafter, varav dock blott 70 % nyttig drageffekt. Flygplanets tyngd är 1 000 kgf. Beräkna banans lutning mot horisontalplanet.
3. En vätgasfylld ballong befinner sig i jämvikt på en höjd över marken, där lufttrycket är 675 mm. På grund av solstrålning mot ballonghöljet har vätgasens temperatur stigit till + 23° C, medan den omgivande luftens temperatur är + 7° C. Ballongens volym är under dessa förhållanden 1 000 m³. Om nu solen under en tid skymmes av moln, sjunker småningom vätgasens temperatur ned till omgivningens. Huru mycket barlast måste inalles utkastas, för att höjden icke skall ändras? Trycket inuti ballongen är ständigt lika stort som det yttre lufttrycket. Hänsyn behöver ej tagas till luftens och vätgasens fuktighet.

4. En ljusstråle infaller i huvudsnittet till ett glasprisma, vars tvärsnitt har formen av en rätvinklig och likbent triangel. Strålen är före inträdet i prismat parallell med hypotenusan och träffar prismat nära den räta vinkelns spets. I vilken riktning går strålen, sedan den passerat prismat? Glasets brytningsindex är 1,53.
5. Två tunna linser, den ena en samlingslins och den andra en spridningslins, äro uppställda på 15 cm avstånd från varandra så, att deras optiska axlar sammanfalla. Ett föremål på 60 cm avstånd framför den förstnämnda linsen ger en bild 22,5 cm bortom den senare linsen. Om föremålet och samlingslinsen befinna sig i oförändrat läge men spridningslinsen flyttas tätt intill samlingslinsen, faller bilden i stället 90 cm bortom linserna. Sök linsernas brännvidder.
6. Ett batteri slutes genom en ledning, bestående av ett motstånd och en galvanometer. Motståndet i hela denna strömkrets utom galvanometern är 2 000 ohm. Galvanometern gör ett visst utslag; samma utslag erhålles, om man urkopplar 1 800 ohm och samtidigt förser galvanometern med en shunt på 20 ohm. Beräkna galvanometerns motstånd.
7. Vid en enfas växelström är den maximala strömstyrkan 2,828 ampere och den maximala spänningen 311,1 volt. Den i strömkretsen utvecklade effekten är 330 watt. Huru stor är fasförskjutningen mellan ström och spänning?
8. En ljuskälla, som kan anses vara punktformig, rör sig längs en horisontell rät linje. Med hjälp av en samlingslins avbildas den på en fotografisk film. Linsens huvudaxel är horisontell; den skäres vinkelrätt av ljuskällans bana. Avståndet från skärningspunkten till linsen är 21,0 cm och linsens brännvidd 7,0 cm. Filmen är vinkelrät mot linsens huvudaxel och rör sig i vertikal riktning med en hastighet av 50 cm/sek. Vid framkallning finner man, att bilden på filmen tecknat en rät linje, som bildar en vinkel av 62° med filmens rörelseriktning. Med vilken hastighet rörde sig ljuskällan? Man kan bortse från filmens formändringar under den fotografiska proceduren.

Resultat: **1.** 1 700 gf. **2.** 11°,54. **3.** 60,5 kg. **4.** Strålen lämnar prismat vid hypotenusan och bildar med denna en vinkel = 62°,66. **5.** + 20 cm och — 45 cm. **6.** 180 ohm. **7.** 41°,4. **8.** 188 cm/sek.

Victor F. Hess Carl D. Anderson

Nobelprisen i fysik och kemi 1936.

Årets Nobelpris i fysik har delats mellan en av de äldsta och en av de yngsta forskarna på det fält, som utgöres av den kosmiska strålningen, höjdstrålningen, ultrastrålningen eller hur man nu vill kalla den. En mera ingående redogörelse härför kan ej ges på denna plats; av sammanfattande artiklar kunna nämnas F. Lindholms i Kosmos 1930 och E. G. Steinkes i Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften 1934.

Upptäckten av strålningen gjordes för snart 25 år sedan vid undersökningar av den svaga jonisation, som iakttages i luften i slutna kärl, även då radioaktiva ämnen ej veterligen äro närvarande. Denna jonisation förklaras till största delen bero på strålning från minimala mängder radioaktiva ämnen i den i kärlet inneslutna luften, i apparaterna själva

och i omgivande luft och fasta kroppar. Genom olika konstgrepp kan denna strålning avskärmas till största delen, varvid den observerade jonisationen avtager starkt. Man började nu misstänka, att den ännu kvarstående jonisationen åtminstone delvis härrörde från strålning uppifrån, vare sig utifrån världsrymden eller från de högsta atmosfärskikten. Detta borde kunna påvisas genom mätningar på olika höjd över jordytan, då de underliggande atmosfärskiktens absorption av strålningen i fråga successivt elimineras, varför den observerade jonisationen borde växa med höjden. Faktiskt fann man i stället ett avtagande, beroende på att en av huvudkällorna till jonisationen, nämligen γ-strålningen från aktiva ämnen i jorden, alltmer försvagades av mellanliggande luftlager. För γ-strålningens absorption är nämligen de genomstrålade skiktens massa i huvudsak avgörande och deras egenskaper i övrigt av mindre vikt; 100 m luft av normal täthet borde absorbera ungefär lika mycket som 1 cm bly eller c:a 50 %. Men på ett par tusen meters höjd borde så litet av strålningen från jorden finnas kvar, att jonisationen åter borde stiga, om den hypotetiska strålningen existerade. Detta påvisades första gången otvetydigt, efter misslyckade försök av tysken Gockel, genom en serie ballonguppstigningar 1912 av den då 29-årige österrikaren Victor F. Hess, som nådde en höjd av 5 000 meter. Det är denna upptäckt, som i år belönats med halva Nobelpriset i fysik.

Hess har även i fortsättningen studerat den nya strålningen bl. a. genom mångåriga kontinuerliga registreringar på Hafelekar (2 300 meter över havet) nära Innsbruck. Dessa registreringar ha vid omsorgsfull statistisk bearbetning givit en del intressanta resultat, t. ex. en daglig variation med en amplitud av $\pm$ 0.2 %. Sambandet med olika meteorologiska faktorer, särskilt barometerståndet, har även varit föremål för Hess' studium.

Kort efter Hess' grundläggande forskningar kastade sig en alltmer växande skara av fysiker och meteorologer över

det nya området, och alla de växlande resultat som nåtts och de linjer som följts kunna här ej ens antydas. Vare nog sagt, att mätningar på stora höjder (Kolhörster, Millikan, Clay, Compton, Piccard m. fl. och, högst av alla, Regener med hans obemannade registreringsballonger) och på stora djup i vatten och andra ämnen såsom salt i tyska saltgruvor (Millikan, Regener, Kolhörster) visat existensen av olika genomträngande komponenter i ultrastrålningen, dels mjukare, dels även strålar med sådan enorm genomträngningskraft, att man blott trodde sig kunna tänka på elektromagnetisk strålning av ännu mycket kortare våglängd än γ-strålar (»ultragammastrålar»). Då Bothe och Kolhörster 1928—1929 införde koincidensmetoden, varvid man registrerar samtidiga impulser från två eller flera s. k. räknerör för korpuskularstrålar enligt Geiger och Müller, kunde de emellertid påvisa existensen i ultrastrålningen av korpuskelstrålar med en genomträngningskraft, som man tidigare blott kunnat tänka sig hos vågstrålar. Man kunde ej avgöra, huruvida de av Bothe och Kolhörster funna korpuskelstrålarna voro att betrakta som primär ultrastrålning eller som sekundärstrålning, alstrad av i övrigt okänd strålning. Men det var tydligt, att problemet ej var så enkelt som man förut trott och att de spekulationer, Millikan, Regener och andra på basis av vågteorien anställt över strålningens energi och dess uppkomst vid hypotetiska kärnreaktioner av olika slag, ej kunde upprätthållas.

Mätningar av strålningsintensitetens beroende av geomagnetisk latitud (Clay, Compton) och dess infallsriktning (Johnson, Rossi m. fl. funno med hjälp av koincidensmetoden flera partiklar från väster än från öster, om mätning gjordes under samma vinkel mot lodlinjen) tolkades av Lemaître och Vallarta med hjälp av Størmers teori för laddade partiklars rörelse i jordens magnetiska fält. Resultatet var, att strålningen måste — åtminstone övervägande — bestå av positivt laddade partiklar med en enorm energi, uppgående till många milliarder elektronvolt.

En annan metod, som ger detaljerade upplysningar, kanske ej om ultrastrålningen själv, men om av den förorsakade sekundära, tertiära o. s. v. fenomen, är Wilsons dimkammarmetod (se t. ex. G. Ising, Kosmos 1927—28). Särskilt värdefull är metoden, om apparaten placeras i ett starkt magnetiskt fält, som avböjer laddade partiklar. Härur samt ur spårens utseende och andra iakttagelser kan man beräkna laddning, massa och energi hos de partiklar, som alstrat spåren. Man fann på detta sätt bl. a. elektronstrålar med mycket hög energi (Blackett och Occhialini m. fl.). Nu kan man emellertid ej alltid vara säker på partikelns rörelseriktning och alltså ej på laddningens tecken; en negativ partikel, som rör sig åt höger, ger precis samma spår som en positiv partikel med samma massa och energi, som rör sig åt vänster. Vid arbeten med Wilsonapparaten satte nu Millikans assistent Carl D. Anderson i Pasadena in en blyplatta i kammaren och kunde då entydigt avgöra rörelseriktningen för en partikel, som genomträngt blyplattan. Den måste komma från den sida, där den av spårets krökning att döma haft största energin: man kunde nämligen blott tänka sig, att den *förlorat* energi vid genomgång genom blyplattan, ej att den *vunnit* energi. Vid en sådan upptagning fann nu Anderson 1932 ett spår, tydligen härrörande från en partikel med elektronens massa men med positiv laddning. Den nya partikeln, vars existens bekräftades genom fortsatta försök, fick av Anderson namnet *positron*. Dess upptäckt var en lysande framgång för Diracs flera år tidigare uppställda »hålteori», som fordrade existensen av en sådan partikel. Dess egenskaper och uppkomstbetingelser ha blivit föremål för intensivt studium, bl. a. av Anderson själv, genom långa serier av Wilsonfotografier. Den uppstår bl. a. vid ett antal kärnreaktioner, vid sönderfall av artificiellt radioaktiva ämnen och genom absorption av ett γ-strålkvantum; i senare fallet uppstår samtidigt en vanlig elektron. Omvänt kunna en positron och en elektron ömsesidigt neutralisera varandra och för-

PETER DEBYE

svinna i form av γ-strålar. Se härom vidare artiklar i denna tidskrift av A. Leide 1934 och av O. Lundqvist 1935.

När man från fysikpristagarna, som i huvudsak begränsat sig till ett speciellt arbetsområde — något som vad den yngre av dem är naturligt med hänsyn till den korta tid han varit vetenskapligt verksam — övergår till kemipristagaren (som enligt mångas mening väl så bra hade varit värd ett fysikpris), möter man en man med en nästan överväldigande rikedom på idéer och uppslag och som varit verksam på vitt skilda områden av fysik och fysikalisk kemi. De arbeten, med vilka Vetenskapsakademien moti-

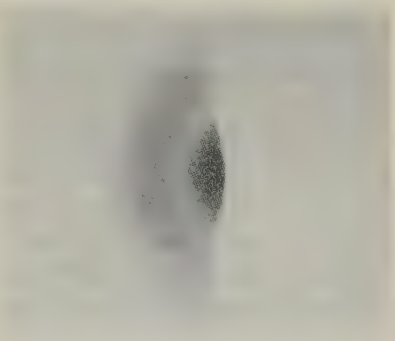
verat Nobelpriset i kemi, nämligen undersökningar över dipolmoment samt röntgen- och elektronstråleinterferens i gaser, te sig nästan som stickprov.

1912 framställde Debye första gången sin teori om dipolmolekyler, d. v. s. molekyler med ett elektriskt moment, beroende på att positiva och negativa laddningar äro delvis skilda åt i molekylen. Ämnen uppbyggda av sådana molekyler ha en dielektricitetskonstant större än 1 på grund av dipolernas inriktning av ett yttre elektriskt fält. Denna inriktning av de permanenta dipolerna störes av värmerörelsen, varför dielektricitetskonstanten växer med avtagande temperatur, detta till skillnad från verkan av dipoler, som alstras genom fältets influensverkan och vars elektriska moment är proportionellt mot fältstyrkan. Det permanenta dipolmomentet är av stort intresse i samband med molekylens struktur. Helt symmetriska molekyler som O_2 och CCl_4 kunna sålunda ej ha något elektriskt moment. Då man påvisar ett sådant moment t. ex. hos H_2O eller NH_3, utesluter detta möjligheten av full symmetri hos molekylerna. Hos H_2O har man t. ex. funnit, att molekylen är böjd i en vinkel med syreatomen i vinkelspetsen, medan NH_3-molekylen är pyramidformad med kväveatomen i toppen. Vid hastigt varierande fält kunna de permanenta dipolerna ej helt följa med fältets växlingar, vilket medför elektriska förluster och därför är av intresse för högfrekvenstekniken.

Debyes andra prisbelönta arbete innebär en annan metod att studera molekylernas struktur. Den ansluter sig till den likaledes av Debye, jämte P. Scherrer, 1915 angivna metoden för studium av kristallstrukturer med hjälp av röntgenstrålar. Om man genomstrålar en kristall med ett fint monokromatiskt röntgenstrålknippe och samtidigt vrider och vänder kristallen på alla möjliga sätt, kommer den då och då i sådant läge, att en reflekterad stråle uppstår genom interferens mellan strålar, avböjda av de olika atomplanen i kristallen. Denna reflexion äger rum under vissa

vinklar, bestämda av kristallens struktur och strålningens våglängd. På en av den avböjda strålningen träffad film får man sålunda ett system ringar, vilkas radier bero på dessa vinklar. Debye—Scherrers metod består nu i att använda en mängd små kristaller i olika lägen i stället för en kristall i en mängd successivt intagna lägen. Man behöver sålunda ej stora, väl utbildade kristaller som vid tidigare metoder utan arbetar med finkristalliniskt material, vilket i många fall medför väsentliga fördelar.

Tänker man sig nu kristalliterna minska ända ned till molekylära dimensioner, får man fortfarande interferensringar (ehuru oftast mindre skarpa), bestämda av avstånden mellan atomerna i molekylen. Liksom förut kristallstrukturer, studerar man nu molekylstrukturer. Renast erhållas interferensdiagrammen från gaser (i figuren återges ett dylikt diagram för CCl_4; exponeringstid 20 timmar). Föreligger ämnet i vätskeform, får man vissa störningar genom molekylernas växelverkan; dessa störningar kan man emellertid, som Debye funnit, utnyttja just för studiet av denna växelverkan. Vid undersökning av gaser är de avböjda röntgenstrålarnas intensitet ytterst liten. På grund av elektronernas vågnatur kan man i stället nyttja elektronstrålar med sådan energi, att de Broglie-vågornas längd blir lagom stor för molekylanalys. Exponeringstiden avkortas härigenom betydligt. Med dessa metoder ha avstånden mellan atomerna i molekylen i många fall kunnat bestämmas med hög noggrannhet.



Debyediagram för koltetraklorid.

Bland Debyes övriga arbeten märkes en kvantumteoretisk beräkning från 1912 av fasta kroppars specifika värme, vilken visat sig stämma synnerligen väl med experimenten.

Ett annat är hans från 1923 under många år, delvis gemensamt med E. Hückel, H. Falkenhagen m. fl. utförda forskningar över elektrolyters egenskaper och de korrektioner till äldre teorier, som nödvändiggöras av jonernas växelverkan inbördes och med lösningsmedlet (se artikel av E. Larsson i Kosmos 1935). Denna teori har givit förklaring till en hel rad egendomliga fenomen, såsom ledningsförmågans variation med fältstyrka och frekvens m. m. Han har även arbetat inom ren matematik, teoretisk optik, metallers elektronteori, adsorptionsfenomen m. m., föreslagit den magnetokaloriska kylmetoden (se E. Ingelstam, Kosmos 1935) och visat, att ultraljudvågor i vätskor kunna användas som gitter för ljusvågor. Detta må vara nog för att antyda omfattningen av Debyes verksamhet.

Carl D. Anderson är född av svenska föräldrar i Newyork den 3/9 1905. Han studerade vid California Institute of Technology i Pasadena och erhöll där doktorsgraden i fysik 1930. Han har samarbetat med sin chef, R. A. Millikan, samt S. Neddermeyer m. fl. och är nu assistant professor vid Millikans institut i Pasadena.

Victor F. Hess är född den 24/6 1883 i Waldstein i Steiermark, Österrike. Han blev fil. dr i Graz 1905, var 1910–20 assistent vid Radiumforskningsinstitutet i Wien, uppehöll 1920—21 en professur i Graz, blev 1921 chef för forskningslaboratoriet vid U. S. Radium Corporation i New Jersey, U. S. A., och 1931 professor i fysik i Innsbruck.

Peter Debye (skrev sig ursprungligen Debije) är född i Maastricht i Holland den 24/3 1884, har innehaft professurer i fysik i Zürich, Utrecht, Göttingen, åter i Zürich och Leipzig samt är sedan 1935 chef för Kaiser-Wilhelms-Institut für Physik i Berlin.

Sven Benner.

De viktigaste konstruktions- och drifts-egenskaperna hos likströms-maskinerna. I.

Av AXEL NORDHULT.

A. Konstruktion.

1. Sedan Faraday år 1831 upptäckt induktionsströmmarna, konstruerades redan 1832 den första elektriska maskinen med permanenta magneter. Den dynamoelektriska principen upptäcktes år 1867 samtidigt av Siemens och Wheatstone, och härigenom hade möjligheten skapats för konstruktion av moderna maskintyper. Grammes ring konstruerades 1870, och två år senare uppfann Heffner-Alteneck det trumlindade ankaret.

Den moderna likströmsmaskinens huvuddelar äro schematiskt angivna i fig. 1. Generatorer och motorer äro byggda på samma sätt, d. v. s. en och samma maskin kan användas både som generator och som motor. Den stillastående delens, statorns, huvuddelar äro polringen eller magnetringen (R), polerna, som äro av två slag, huvudpoler (H) och kommuterings- eller vändpoler (V) samt polplattorna eller polskorna (P) och de på bilden ej synliga lagersköldarna, som uppbära borsthållarna med kolen. Den roterande delens, rotorns eller ankarets, huvuddelar äro ankarkärnan (A), ankarlindningen (ej avbildad), kommutatorn eller kollektorn (K) och axeln (C). För att förhindra uppkomsten av virvelströmmar eller rättare för att i väsentlig grad nedbringa deras styrka, äro alla järndelar som genomflytas av ett variabelt magnetfält utförda av samman-

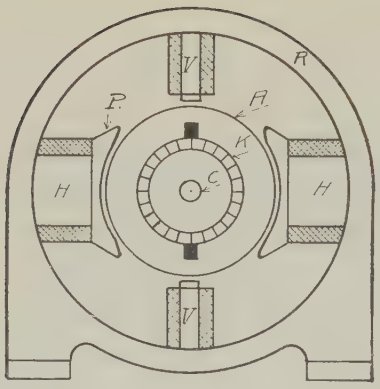
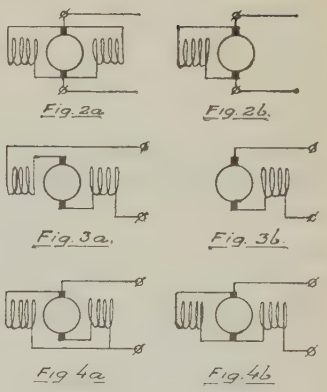


Fig 1.

Likströmsmaskinens huvuddelar: magnetring (R), huvudpoler (P), vändpoler (V), ankarkärna (A), kollektor (K), axel (C).



Schematisk framställning av (2 a, b) shunt-, (3 a, b) serie- och (4 a, b) compoundmaskin.

pressade plåtlameller isolerade från varandra genom papper, som före plåtarnas hoppressning klistrats på dem. Polring och poler bestå av massivt järn, under det ankarringen är lamellerad. Då spåren för ankarlindningen passerar polskorna uppstår en viss variation i fältstyrkan, varför i större maskiner även polskorna äro lamellerade. Det må i detta sammanhang påpekas, att den för järnvägs- och spårvägsdrift så betydelsefulla enfasseriemotorn, som i princip är byggd som en likströmsseriemotor, i vissa betydelsefulla konstruktionshänseenden avviker från denna. Då magneterna här matas med växelström äro även polring och poler lamellerade. Med anledning av vilseledande uppgifter i vissa elementära läroböcker må påpekas, att luftgapet mellan ankarringen och polskorna uppgår till någon eller några mm, alltefter maskinens storlek. Luftgapets storlek bestämmes av de driftsegenskaper, maskinen skall äga och ej av de tekniska möjligheterna, att liksom vid asynkronmotorn (som har ett avsevärt mindre luftgap) nedbringa luftgapet till ett minimum. Ej heller omsluter pol-

skorna ankarringen så mycket sig göra låter. Polskornas omfattningsvinkel och luftgapets storlek bestämmes av en strävan att göra fältfördelningen utefter ankarringen sinusformad. I detta syfte ökas luftgapets storlek något vid de utskjutande kanterna på polskorna.

Magnetlindningen. Kopplingsschemata för shunt-, serie- och compoundmaskinerna äro angivna i fig. 2—4. 2 b och 3 b äro starkare schematiserade än 2 a och 3 a. Compoundkopplingen kan ske antingen enligt 4 a (yttre compoundering) eller 4 b (inre compoundering).

Magnetfältets styrka är ungefär proportionell mot produkten av magnetlindningens varvtal och strömstyrkan i magnetlindningen. I en seriemaskin passerar hela huvudströmmen magnetlindningen, varför densamma måste vara grov. På grund av den stora strömstyrkan blir lindningsvarvtalet relativt litet. För bedömande av shuntlindningens utformning kunna följande synpunkter anföras: Det i magnetlindningen utvecklade strömvärmet ($= V^2/R$) får endast utgöra några få procent av maskinens effekt, varför motståndet måste vara stort, vilket i sin tur medför, att strömstyrkan blir liten. För att uppnå den erforderliga produkten av lindningsvarvtal och strömstyrka måste lindningsvarvtalet bli stort.

Ankarlindningen. Det ringlindade ankaret, Grammes ring, har helt utträngts av det trumlindade ankaret. Den Grammeska ringen nämnes dock ofta vid sidan av trumankaret på grund av sitt historiska och framförallt pedagogiska värde. Trumankaret är vida överlägset ur tillverkningsteknisk synpunkt och ställer sig därför avsevärt billigare. Ur driftssynpunkt äro de båda lindningstyperna i stort sett likvärdiga. Särskilt må anföras, att ringlindningens motstånd ej är nämnvärt större än trumlindningens, vilket ofta anföres vara anledningen till trumlindningens överlägsenhet.[1]

[1] G. Ödberg har i denna tidskr. årg. *18*, 1935, sid. 19—23 lämnat en utförlig jämförelse av de båda ankartyperna.

I de elementära fysikläroböckerna har man under senare år strävat efter att redogöra för trumankarets konstruktion och verkningssätt. På grund av trumlindningens utformning är det emellertid mycket svårt, att ge en åskådlig och samtidigt fullständig framställning, som eleven kan återge vid ett förhör. Författaren har därför under några år först lämnat en redogörelse för ringankaret och därefter påvisat sambandet mellan ring- och trumlindningen, varvid lätt insetts, att den för ringankaret givna framställningen även gäller för trumankaret. Författarens framställning är följande:

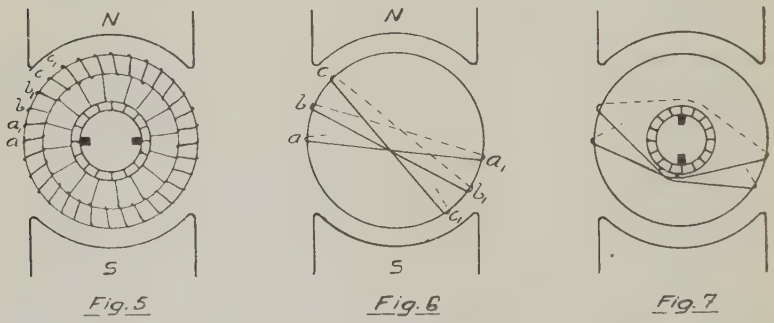


Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7

Fig. 5. Ringlindning. Fig. 6. Trumlindning härledd ur ringlindningen i fig. 5. Fig. 7. Trumlindningens anslutning till kollektorn.

Fig. 5 åskådliggör ringlindningen. Karakteristiskt för såväl ringlindningen som trumlindningen är, att om man utgår från en godtycklig punkt på densamma och följer den i endera riktningen, så kommer man tillbaka till utgångspunkten. Med en härva förstas den del av ankarlindningen, som sammanbinder två närbelägna lameller på kollektorn. I fig. 5 bestå alltså härvorna av två lindningsvarv. Om i härvan aa_1 det andra lindningsvarvet a_1 borttages och i stället flyttas till det diametralt motsatta läget, så som skett i fig. 6, erhålles en motsvarande härva i det trumlindade ankaret. Från denna härva fortsätter man till härvan bb_1 o. s. v. runt om hela periferien, tills man återkommer till

utgångspunkten a. För att ge plats åt axeln och kollektorn måste lindningen vid ankarets ändar vikas undan, som framgår av fig. 7. Av praktiska skäl förenas här härvan med den lamell, som ligger symmetriskt med avseende på härvans båda diametralt belägna delar. Observeras bör, att vid såväl ring- som trumlindning borstarna skola stå i kontakt med härvor, som befinna sig i neutralläget (se nedan). Vid Grammes ring sammanfaller därför borstarnas sammanbindningslinje med neutrala zonen, vid trumankaret däremot med polernas sammanbindningslinje.

Utan svårighet inses, att av symmetriskäl den inducerade spänningen i en ringlindad härva t. ex. bb_1 är exakt densamma som den i motsvarande trumlindade härva. Då detta resonemang kan tillämpas på samtliga härvor, inses att de båda ankartyperna måste i stort sett vara elektriskt likvärdiga. Vid ett ej alltför ingående teoretiskt studium av driftsförhållandena i trumankaret kan detta alltså utbytas mot ringankaret, vilket här sker i det följande. Även mera komplicerade utföringsformer av trumlindning förekomma.

2. *Addition av sinusformade växelspänningar.*

För att denna framställning skall kunna läsas av gymnasister, som utföra enskilt arbete på förevarande område, vill författaren här inskjuta en kortfattad framställning av addition av sinusformade växelspänningar och växelströmmar.

I fig. 8 a låta vi en slinga eller härva rotera i positiv led med konstant vinkelhastighet ω i ett homogent magnetfält. I det med heldragen linje angivna läget befinner sig härvan i det s. k. neutralläget eller neutralzonen d. v. s. i det läge, där den inducerade emk är noll. Efter t *sek* har härvan vridit sig vinkeln ωt. Som bekant induceras i härvan under dess rotation en sinusformad växelspänning, vars momentana värde e vid tiden t beräknas enl. formeln $e = E \sin \omega t$, där E är spänningens maximivärde. Spän-

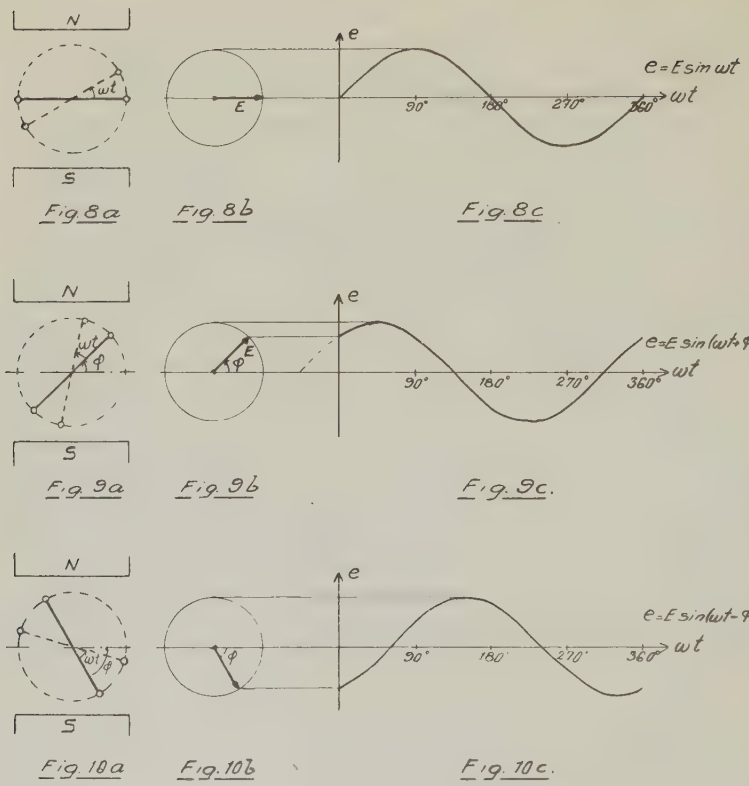


Fig. 8a Fig. 8b Fig. 8c

Fig. 9a Fig. 9b Fig. 9c.

Fig. 10a Fig. 10b Fig. 10c.

Vektorer för sinusformad växelström.

ningsförloppet åskådliggöres grafiskt i fig. 8 c. Denna kurva kan tänkas uppkomma därigenom, att den i fig. 8 b uppritade »radius vector» (E) tänkes rotera med samma konstanta vinkelhastighet ω som härvan, d. v. s. E är alltid parallell med härvans plan. I varje ögonblick är E:s projektion på en vertikal linje $= E \sin \omega t$, d. v. s. lika med spänningens momentanvärde e. Denna »radius vector» kallas den sinusformade växelspänningens *vektor*. Enbart med kännedom om vektorn E i fig. 8 b kan man upprita spänningskurvan i fig. 8 c eller ange det matematiska uttrycket $e = E \sin \omega t$. Vi ha alltså funnit, att en sinusformad växel-

spänning fullständigt kan karaktäriseras på tre sätt, genom: 1:o vektorn, 2:o spänningskurvan och 3:o det matematiska uttrycket för momentanspänningen.

I det behandlade fallet (fig. 8) befann sig härvan vid tiden $t = 0$ i neutralläget. Vi antaga nu, att härvan vid tiden $t = 0$ befinner sig i ett annat läge, som med neutralläget bildar vinkeln q. I fig. 9 a befinner sig härvan i sitt begynnelseläge. Vinkeln q kallas begynnelsefasen. Vektorn för ifrågavarande växelspänning är uppritad i fig. 9 b, och med kännedom om denna vektor, d. v. s. med kännedom om spänningens maximivärde och begynnelsefasen, kan spänningskurvan (Fig. 9 c) uppritas och det matematiska uttrycket för momentanvärdet $e = E \sin(\omega t + q)$ angivas. I fig. 10 är begynnelsefasen negativ.

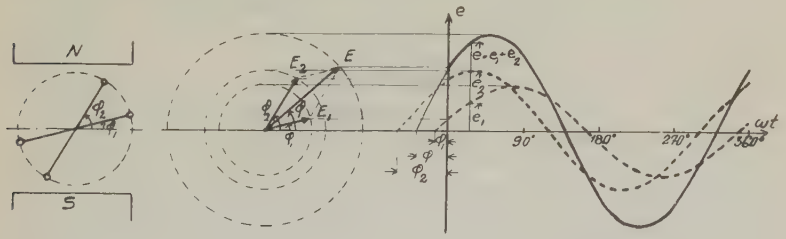


Fig. 11 Fig. 12 a Fig. 12 b

Grafisk framställning av växelspänningars addition.

Vi antaga nu, att de två härvorna i fig. 11 rotera med samma konstanta vinkelhastighet och att deras begynnelsefaser äro resp. q_1 och q_2; $q_2 - q_1$ kallas fasförskjutningen mellan de i härvorna inducerade spänningarna. Antalet lindningsvarv i de båda härvorna antages vara olika, varigenom de inducerade spänningarnas max.-värden E_1 resp. E_2 också bli olika. De båda härvorna seriekopplas nu, och vi skola bestämma den resulterande spänningen. Blir även denna spänning sinusformad eller blir den det icke? Om den blir sinusformad, vad blir då maximivärdet och begynnelsefasen? Vektorerna E_1 och E_2 och motsvarande spänningskurvor äro uppritade i fig. 12 a och 12 b. Vi betrakta

12 b. Om i ett visst ögonblick momentanspänningarna i de båda härvorna äro e_1 och e_2, så erhålles den resulterande momentanspänningen e genom algebraisk addition, alltså $e = e_1 + e_2$. Sedan på detta sätt ett tillräckligt antal punkter bestämts, har den resulterande kurvan uppritats i fig. 12 b. Figuren synes ge vid handen, att den resulterande kurvan är av sinusform. Att så är fallet bevisas genom trigonometrisk addition av momentanvärdena $e_1 = E_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ och $e_2 = E_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$. Man erhåller

$$e_1 + e_2 =$$

$$= (E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2) \sin \omega t + (E_1 \sin \varphi_1 + E_2 \sin \varphi_2) \cos \omega t,$$

varav

$$e = E \sin(\omega t + \varphi),$$

där de införda storheterna E och φ bestämmas av relationerna

$$E^2 = E^2_1 + E^2_2 + 2E_1 E_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_1 \sin \varphi_1 + E_2 \sin \varphi_2}{E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2}.$$

Additionen bevisar, att resulterande spänningen är sinusformad och att dess vektor erhålles genom *geometrisk* addition av vektorerna E_1 och E_2. Dylik geometrisk addition kallas även vektoraddition.

I och med att vi funnit den resulterande spänningens vektor, ha vi också funnit maximivärdet och begynnelsefasen och erhålla lätt fasförskjutningen i förhållande till de ursprungliga spänningarna. Denna vektoraddition kan naturligtvis utsträckas till addition av ett godtyckligt antal växelspänningar med en och samma vinkelhastighet eller frekvens.

Även en växel*strömstyrka* kan representeras genom en vektor. Genom vektoraddition kan man beräkna den strömstyrka som erhålles, då sinusformade växelströmmar från ett antal grenledningar sammanflyta i en huvudledning.

Då den roterande vektorns projektion på en viss rät linje anger momentanvärdet, inses omedelbart, att en parallellförskjutning av vektorn är tillåten.

3. *Den inducerade spänningen i ankaret hos en likströmsmaskin.*

Först må en anmärkning inskjutas. I det föregående har spänningsvektorn uppritats parallell med den roterande härvan. För att då erhålla momentanvärdet skall vektorn projiceras på en linje, som bildar rät vinkel med neutrallinjen. Om man i stället vill erhålla momentanvärdet genom projektion på neutrallinjen, måste vektorn vridas 90°, så att den alltså bildar rät vinkel med den roterande härvans plan.

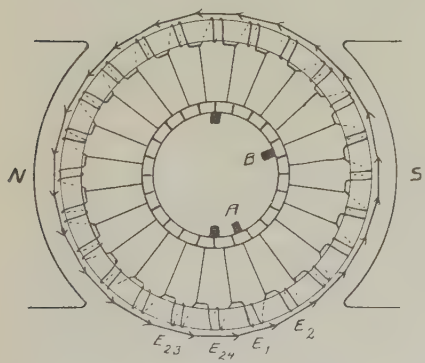


Fig 13

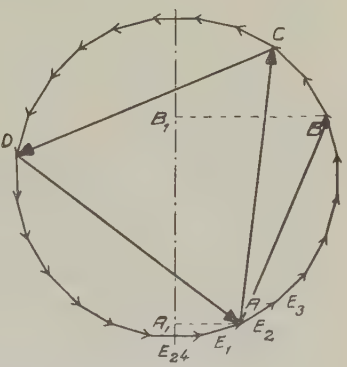


Fig. 14.

Grafisk framställning av inducerade spänningar i likströmsankaret.

I fig. 13 har avbildats ett schematiserat ringlindat ankare med 24 härvor med den till varje härva hörande vektorn (E_1, E_2 o. s. v.), som här är ritad vinkelrätt mot härvans plan och parallellförflyttad till periferien. Spänningarna erhållas nu genom projektion på neutrallinjen, som här är vertikal. Vid rotationen följer vektorn med härvan. Här göres det förenklande antagandet, att fältfördelningen utefter ankarets periferi är sinusformad, vilket medför, att den i varje härva inducerade spänningen också blir sinusformad. Då varje härva innehåller lika många lindningsvarv, blir spänningens maximivärde detsamma för samtliga härvor.

De inducerade spänningarna äro däremot fasförskjutna. Om antalet härvor är n, blir fasförskjutningen mellan spänningen, som induceras i två närbelägna härvor, 360/n grader. Voltskalan har valts så, att vektorerna bilda en regelbunden månghörning. För ernående av större överskådlighet har i fig. 14 endast spänningsvektorerna uppritats. Vi antaga, att en punkt på sammanbindningsledningen mellan två godtyckliga härvor t. ex. 1 och 2 är ansluten till en *släpring* samt att föreningsledningen mellan två andra härvor t. ex. 7 och 8 förenats med en annan släpring. Medelst kol (»borstar»), som glida mot ringarna, kan man uttaga spänningen mellan de två släpringarna. Denna spänning erhålles genom addition av spänningarna i de mellanliggande seriekopplade härvorna 2—7. Genom geometrisk addition av vektorerna E_1, $E_2 \ldots E_7$ erhålles den resulterande spänningens vektor AB (fig. 14), som alltså anger såväl maximivärdet som fasförskjutningen i förhållande till spänningarna i olika härvorna.

Om punkterna A, C och D förenas med var sin släpring, så erhålles mellan dessa vanlig trefasig växelspänning med 120° fasförskjutning mellan de olika borstarna. Den största växelspänningen erhålles genom uttag från två diametralt motsatta punkter belägna på neutrallinjen. Från en likströmsgenerator eller motor kan man alltså genom att på detta sätt förena vissa härvor med släpringar uttaga växelström. Om från en likströmsmotor uttages växelström, kallas maskinen *enankaromformare*. Kollektorn och släpringarna äro då placerade på var sin sida om ankaret.

Vi övergå nu till att undersöka, vilka spänningar som kunna uttagas från *kollektorn* hos likströmsgeneratorn. Vi antaga, att två borstar placeras i godtyckliga lägen t. ex. i lägena A och B angivna i fig. 13. Spänningen i det ögonblick, som fig. 13 och 14 illustrera är lika med momentanspänningen hos den växelspänning, som representeras av vektorn $A—B$, alltså lika med vektorns projektion på neutrallinjen. Efter 1/24 av ifrågavarande ankares omlopps-

tid är spänningen mellan borstarna åter exakt densamma, ty de mellan borstarna nu belägna härvorna 1—6 inta nu samma läge, som förut härvorna 2—7 intogo. Under den korta mellantiden har spänningen varierat ytterst litet (= variationen av vektorns projektion under 1/48 av ett omlopp). Den uttagna spänningen blir alltså likriktad och praktiskt taget konstant. Spänningen mellan maskinens »ordinarie» borstar representeras alltså av diametern i den cirkel, som omskriver den av vektorerna bildade månghörningen.

Vi antaga, att en enankarformares polspänning är V volt. Maximispänningen hos den *största* enfasspänning som kan uttagas är då också V volt, och effektivvärdet $\frac{V}{\sqrt{2}}$. Vi vilja även beräkna eff. värdet hos uttagen trefasspänning. I fig. 15 representerar diametern AB V volt. Den inskrivna liksidiga triangelns sidor äro vektorerna för växelspänningen mellan de tre fasern a, alltså spänningens eff. värde = $\frac{V\sqrt{6}}{4}$. Hos en enankaromformare med fyra släpringar placerade så som fig. 15 anger kunna tre olika stora växelspänningar representerade av vektorerna A—B, A—C och B—C uttagas. Eff. värdena bli resp. $\frac{V\sqrt{2}}{2}$, $\frac{V\sqrt{6}}{4}$ och $\frac{V\sqrt{2}}{4}$.

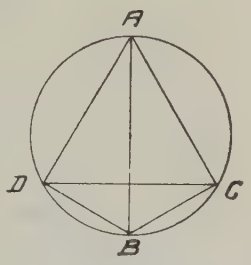


Fig. 15

Spänningar som kunna uttagas från enankaromformare med fyra släpringar.

Av intresse är att iakttaga, att summan av spänningarna i samtliga de seriekopplade härvorna är noll, ty vektorerna bilda en sluten polygon. Om så ej vore fallet, skulle strömmar uppstå i en likströmsgenerators ankarlindning, även om ingen ström uttoges från maskinen. Likaså inses det kända förhållandet, att summan av de tre spänningarna vid

vanlig trefasig växelspänning är noll, ty även här erhålles en sluten polygon. Även vid en 4-fasig, 5-fasig, ... n-fasig växelspänning är summan noll.

I ovan givna framställning av spänningsförhållandena i likströmsankaret har förutsatts, att fältfördelningen utefter periferien är sinusformad. I verkligheten förefinnes en avvikelse från sinusformen, ty luftgapet har konstant längd inom ett stort område. Detta medför, att den inducerade spänningen blir nära nog konstant på ömse sidor om maximi- och minimipunkterna. Det konstanta områdets utsträckning bestämmes av polskornas omfattningsvinkel. Dessutom ge tänderna i ankaret upphov till vissa höga »övertoner». Dessa avvikelser äro dock ej större än att ovan givna framställning ger en god bild av de verkliga förhållandena.

4. *Magnetfältet.*

Det av huvudpolerna alstrade magnetfältet passerar ankaret, luftgapet, polerna och polringen symmetriskt. Detta magnetfält representeras i fig. 16 av vektorn *H*. Om strömmen genom huvudpolernas magnetlindningar brytes och ström i stället ledes genom ankaret, erhålles det s. k. ankarfältet, som i fig. 16 representeras av vektorn *A*. Detta är riktat vinkelrätt mot huvudfältet. I normal drift är det resulterande fältet sammansatt av huvud- och ankarfält och i fig. 16 representerat av vektorn *F*. Neutrallinjen, som är vinkelrät mot fältet, har genom ankarfältet vridits, och kraftlinjerna ha fått den osymmetriska form, som angives i figuren. Ankarfältets deformerande inverkan kallas *ankarreaktion*. En under-

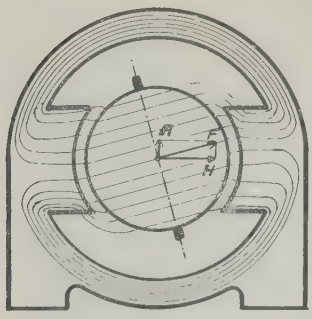


Fig. 16
Ankarreaktion.

sökning visar, att neutrallinjen vridits mot rotationsriktningen vid en motor och med rotationsriktningen vid en generator. Angående kommuteringspolernas fält se nedan.

5. Kommuteringsproblemet.

På grund av kolets bredd blir en härva kortsluten under en viss kort tid. Efter kortslutningen passeras härvan av ankarströmmen i motsatt riktning mot före kortslutningen. Under kortslutningstiden bör induceras en spänning i härvan, som alstrar en ström av samma riktning och styrka som den ankarström, vilken efter kortslutningen skall genomflyta härvan. Om detta ej skedde, skulle omkastningen ske ögonblickligt, då kortslutningen upphör. På grund av härvans relativt stora självinduktion kan detta ej ske, utan ankarströmmen passerar då förbi härvan mellan kolet och den släppande lamellen i form av en kortvarig ljusbåge eller »gnista». Denna gnistbildning skulle snart förstöra kollektorn. Om kolet ej befinner sig i neutralläget, så induceras i den kortslutna härvan en spänning, vars storlek erhålles genom att projiciera härvans spänningsvektor på neutrallinjen. Denna spänning blir större ju större vinkelavståndet är mellan kolet och neutrallinjen. Den för strömvändningen erforderliga spänningen i den kortslutna härvan kan alltså erhållas genom en lämplig förskjutning av borstarna från neutrallinjen.

Borstarna skola alltså förskjutas av två anledningar, dels på grund av ankarreaktionen och dels ytterligare för strömvändningen. För att möjliggöra detta äro vissa äldre maskiner försedda med vridbart borstställ. Då såväl ankarreaktionen som erforderlig kommuteringsspänning växa med belastningen bör borstarnas vridning variera med belastningen, vilket är olägligt. I stället använder man sig av kommuterings- eller vändpoler (Se fig. 1), vilkas lindningar seriekopplas med ankarlindningen. Antalet lindningsvarv avpassas så, att ankarfältet kompenseras och dessutom erforderlig kommuteringsspänning erhålles. Då

magnetiseringen av kommuteringspolerna sker med ankarströmmen, upphäves ankarfältet automatiskt vid alla strömstyrkor. Då ankarfältet upphäver en väsentlig del av fältet genom kommuteringspolen, och denna alltså endast genomflytes av det för strömvändningen erforderliga fältet, kan denna pols genomskärningsyta göras liten. Små maskiner förses dock varken med vridbart borstställ eller kommuteringspoler. Strömstyrkans variation i en enstaka härva framgår av fig. 17. Under tiden mellan två kortslutningar är strömstyrkan i härvan konstant och lika med halva ankarströmmen. Under den mycket korta kommuteringstiden t_k vänder strömmen, varefter den under nästa halva omlopp åter är konstant.

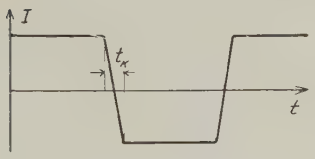


Fig. 17

Strömmen i en härva.

B. Generatorernas driftsegenskaper.

En generators driftsegenskaper studeras lämpligast genom upptagande av vissa karakteristiska kurvor s. k. karakteristikor. Vi behandla i det följande några av de viktigaste.

6. *Tomgångskarakteristikan (T. K.).*

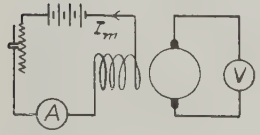


Fig. 18

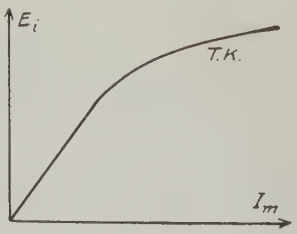


Fig. 19.

Kopplingsschema (fig. 18) för upptagande av en generators tomgångskarakteristika (T. K. i fig. 19).

Denna kurva anger den i ankaret inducerade spänningen E_i som en funktion av magnetiseringsströmmen I_m. Vid upptagning av kurvan kopplas enligt schemat i fig 18. Ankaret drives runt vid konstant, normalt varvtal med en annan motor. Magnetiseringsströmmen erhålles från en separat strömkälla. Om man ej har möjlighet att reglera drivmotorns varvtal, avläses ankarets varvtal med en varvräknare, varefter den avlästa spänningen reduceras till den spänning, som skulle erhållas, om varvtalet vore det normala. Den inducerade spänningen är ju nämligen enligt Faradays induktionslag proportionell mot rotationshastigheten.

Eftersom den i ankaret inducerade spänningen är proportionell mot det magnetiska flödet (Φ), skola vi bilda oss en uppfattning om dess storlek. Induktionslinjerna bilda slutna kurvor. Det magnetiska flödet har analoga egenskaper med den elektriska strömkrets, som bildas av ett batteri och ett eller flera motstånd. Elektromotoriska kraften motsvaras av den magnetomotoriska kraften $k\,n\,i$, där n är magnetlindningens lindningsvarvtal, i magnetiseringsströmstyrkan och k en konstant. Det elektriska ledningsmotståndet motsvaras av det magnetiska motståndet eller reluktansen $\frac{l}{\mu A}$, där A är flödets genomskärningsarea, l dess längd och μ den specifika magnetiska ledningsförmågan, genomträngligheten eller permeabiliteten. Genom lämpligt val av enheter har man för luft erhållit $\mu = 1$. För den elektriska maskinens magnetiska krets har man i analogi med Ohms lag:

$$\Phi = \frac{k\,n\,i}{\frac{l_1}{1A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{l_3}{\mu_3 A_3} + \ldots}$$

där l_1, l_2, l_3 ..... äro längden av luftgapet, polskorna, polkärnorna, polringen, tänderna och ankarkärnan. A_1, A_2, A_3 ..... äro motsvarande genomskärningsareor. Järnets

permeabilitet är mycket stor (ungefär 6 à 7 000), då flödet är relativt litet, men då flödet växer på grund av magnetiseringsströmmens ökning, minskas permeabiliteten avsevärt, järnet blir mättat. I motsats till järnet är luftens permeabilitet konstant och oberoende av strömstyrkan.

Vi återgå till T.K. och hänvisa till fig. 19. Då den alstrade emk. är porportionell mot Φ, kunna vi lägga ovanstående formel och resonemang till grund för bedömning av T.K:s form. Vid svag och medelstark magnetisering är motståndet i järnet — trots den väsentligt längre vägen genom järnet än genom luftgapet — betydligt mindre än i luftgapet. Kurvans nedre del bestämmes därför huvudsakligast av magnetiska motståndet i luftgapet. Den utgår alltså nästan rätlinigt från origo. Då magnetiseringen ytterligare ökas, mättas järnet alltmera, så att en viss ökning av strömstyrkan medför en relativt ringa ökning av flödet och den inducerade emk. Härigenom får T.K. sin böjda form. Hos en generator kan man alltså ej genom ökning av magnetiseringsströmmen nämnvärt öka spänningen. En generator, som lämnar relativt hög spänning, måste därför byggas med stort härvantal och många lindningsvarv per härva. Eftersom flödet är proportionellt mot inducerade spänningen, kallas T.K. även magnetiseringskurva.

7. *Belastningskarakteristikan B. K.*

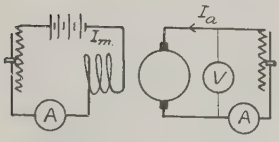


Fig. 20

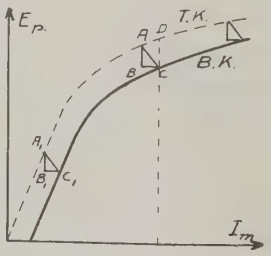


Fig. 21

Kopplingsschema (fig. 20) för upptagande av en generators belastningskarakteristika (B. K. i fig. 21).

B. K. anger polspänningen E_p som en funktion av magnetiseringsströmmen, under förutsättning att maskinen lämnar en konstant ström I, samt att varvtalet är det normala. Vid experimentell upptagning kopplas enligt fig. 20. I diagrammet i fig. 21 är T. K. inritad. Vi vilja ur denna T. K. härleda utseendet av B. K. Vi tänka oss först, att strömmen I vore noll, och att vi alltså befinna oss i en punkt t. ex. A på T. K. Om sedan strömmen I får växa, så att den uppnår det värde, för vilket B. K. skall bestämmas, så uppstår i ankarlindningen ett spänningsfall ($= R_a \cdot I_a$), så att spänningen mellan polerna sjunker från E_i till E_p. Spänningsfallet är lika med sträckan AB. Vi skulle alltså vänta oss, att punkten B skulle ligga på B. K. Emellertid ha vi nu i ankaret en ström, som framkallar en ankarreaktion. Denna förorsakar av anledningar, som vi här ej ingå på, en minskning av magnetflödet, vilket skulle medföra en ytterligare sänkning av polspänningen. För att komma till en punkt på B. K. låta vi emellertid spänningen ej falla ytterligare på grund av ankarreaktionen, utan öka i stället magnetiseringsströmmen I_m med ett belopp angivet av sträckan BC, som är tillräckligt för kompensation av ankarreaktionens inverkan. Vi ha kommit till punkten C, den s. k. belastningspunkten, som alltså ligger på B. K. ABC bildar en rätvinklig triangel den s. k. *belastningstriangeln*. Om vi i stället hade utgått från en annan punkt A_1, hade vi kommit till belastningspunkten C_1 på B. K. och erhållit belastningstriangeln $A_1B_1C_1$. Eftersom ankarströmstyrkan enligt förutsättningen är densamma som i förra fallet, blir spänningsfallet A_1B_1 lika med AB. Vidare bestämmes kateten B_1C_1 av ankarreaktionen, som i sin tur bestämmes av ankarströmmen. Då denna är oförändrad, blir alltså B_1C_1 lika med BC. Vi erhålla alltså B. K. genom att låta belastningstriangeln ABC glida med hörnet A utefter T. K. Belastningskarakteristikan för en t. ex. hälften så stark ström erhålles genom att låta en triangel med hälften så stora sidor glida. De på detta sätt erhållna belastningskurvorna

motsvara dock ej exakt de verkliga förhållandena. Då huvudfältet minskas, avkortas nämligen även sidan *BC* i triangeln. Om vi befinna oss i punkten *C* på B. K. och vi utan att ändra I_m bryta ankarströmmen, stiger spänningen till punkten *D* på T. K. På grund av ankarreaktionen stiger alltså spänningen mera än det ohmska spänningsfallet *AB*. Även vid maskiner med vändpoler förorsakar ankarfältet en deformation av huvudfältet, som åstadkommer ett extra spänningsfall.

Eftersom upptagandet av T. K. och B. K. sker med separat strömkälla, äro ovan angivna karaktäristikor gemensamma för serie-, shunt- och compoundgeneratorer.

8. *Yttre karakteristikan (Y. K.)*

Vid upptagande av T. K. och B. K. har visserligen maskinen drivits som generator, men magnetiseringsströmmen har erhållits från en separat strömkälla.

Vi övergå nu vid upptagande av Y. K. till självmagnetiserade generatorer. Y. K. anger polspänningen som funktion av den av generatorn levererade strömmen *I*, under förutsättning att varvtalet är konstant. Eftersom magnetlindningen anslutits på olika sätt till ankarlindningen vid shunt- och seriegeneratorn, bli förhållandena helt olika vid de båda maskintyperna.

a. *Shuntgeneratorns Y. K.*

Vid experimentell upptagning av denna viktiga karakteristika kopplas enligt schemat i fig. 22.

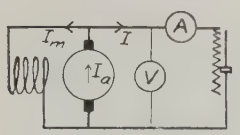


Fig. 22

Kopplingsschema för upptagande av en shuntgenerators yttre karakteristika (Y. K.)

Vi skola med kännedom om T. K. i fig. 23 härleda Y. K. Om maskinens varvtal är det normala och ingen ström uttages, befinna vi oss i punkten *P* på T. K. Vi förena generatorns poler med ett stort motstånd, som så småningom urkopplas. Om därvid ett

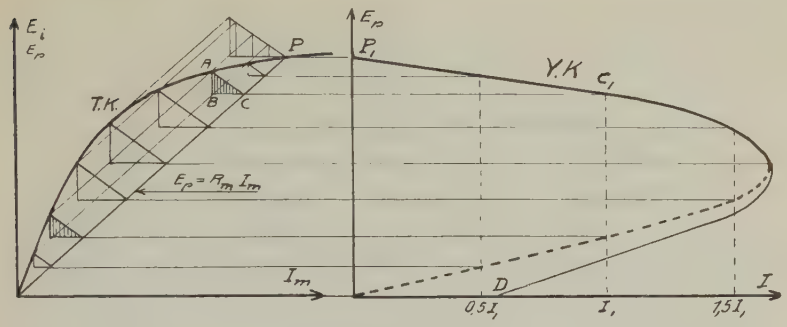


Fig. 23.

Härledning av shuntgeneratorns Y. K. ur T. K.

antal motsvarande värden på polspänningen (E_p) och magnetiseringsströmmen (I_m) inprickades i samma diagram som T. K., skulle dessa punkter ligga på den räta linje, som sammanbinder P med origo, ty motståndet (R_m) i magnetlindningen är ju konstant och lika med $\frac{E_p}{I_m}$ eller $E_p = R_m . I_m$, vilken ekvation representerar en rät linje genom origo med vinkelkoefficienten R_m. Räta linjen *origo—P* är orten för alla belastningspunkter (se B. K.) under förhandenvarande driftsförhållanden. Andra änden av hypotenusan i belastningstriangeln ligger alltid på T. K., varför alla belastningstrianglar äro inneslutna mellan linjen *origo—P* och T. K. Vi inpassa ett antal belastningstrianglar av varierande storlek, vilka alla, enligt vad som sagts vid behandlingen av B. K., måste vara likformiga. Sidorna i dessa trianglar äro proportionella mot ankarströmstyrkan I_a, men då I_m är liten jämförd med I_a och I, kunna vi anse, att triangelsidorna även äro proportionella mot I. Vi antaga, att I vid normal, full belastning är I_1, som utsättes i fig. 23. Belastningstriangeln vid denna strömstyrka är *ABC*, där belastningspunkten C anger polspänningen E_p, som överföres till det högra diagrammet. Vi ha därigenom erhållit den punkt, C_1 på Y. K., som anger

polspänningen vid full belastning. På sätt som framgår av fig. 23 har belastningstrianglar inpassats, vilkas sidor förhålla sig till sidorna i *ABC* som 0,5, 1,0, 1,5 och 1,65. De på så sätt erhållna polspänningarna motsvaras av *I*-värden, som äro resp. 0,5, I_1, I_1, 1,5 I_1 och 1,65 I_1. Vi ha alltså funnit ett antal punkter på Y. K. Mot ett *I*-värde svara två E_p-värden. Då motståndet i yttre ledningen minskas, växer först strömstyrkan, men då motståndet alltjämt urkopplas, uppnår strömstyrkan ett maximivärde (här ungefär 1,65 I_1), varefter strömstyrkan åter sjunker. Då motståndet helt urkopplats, d. v. s. generatorn kortslutits, går strömstyrkan enligt kurvan ned till noll, vilket synes naturligt, ty då generatorn kortslutits, blir $E_p = 0$, varför även I_m och magnetiska fältet försvinner. E_i blir alltså även noll, varför ingen ström alstras. I verkligheten går dock ej kurvan till origo utan till punkten D. Kortslutningsströmstyrkan origo—D alstras av den remanenta magnetismen. Att först kortsluta en *shunt*generator och därefter igångsätta densamma innebär alltså ingen risk för maskinen. Om, sedan Y. K. upptagits i riktningen P_1C_1D, motståndet åter ökas, erhålles på grund av järnets hysteresis en betydande avvikelse från den just upptagna kurvan. Vid normal drift levererar generatorn en ström, som varierar mellan noll och ett värde, som något kan överstiga I_1. Under normal strömleverans sjunker alltså shuntgeneratornas polspänning något, då strömförbrukningen växer.

b. *Seriegeneratorns Y. K.*

Vid upptagande av kurvan ledes strömmen genom ett reglerbart motstånd och en ampèremeter. Polspänningen bestämmes med voltmeter. Även här förutsättes konstant varvtal. Eftersom den utgående strömmen är densamma som magnetiseringsströmmen, kunna T. K. och Y. K. utritas i samma diagram. Även vid seriegeneratorn kan Y. K. härledas ur T. K., vilket skett i fig. 24. Om $I = I_m = O$, finnes intet magnetiskt flöde, varför E_i och alltså även E_p

är noll. Y. K. måste alltså utgå från origo. Då I sedan ökas, tilltager även det magnetiska flödet, varigenom såväl E_i som E_p växa, E_p dock mindre än E_i på grund av spänningsfallet i ankaret och ankarreaktionen. Vid full belastning antages strömstyrkan vara I_1. Belastningstriangeln är då ABC. Belastningspunkten C ligger på Y. K. För att sedan finna belastningspunkterna för 0,5 I_1 o. s. v., förfares på det sätt, som framgår av fig. 24. I motsats mot vad som var förhållandet vid shuntgeneratorn stiger alltså polspänningen hos seriegeneratorn, då belastningen ökas.

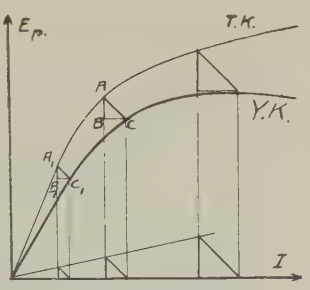


Fig. 24.
Härledning av seriegeneratorns Y. K. ur T. K.

c. *Compoundgeneratorns Y. K.*

Om man i en compoundgenerator endast använde sig av shuntlindningen, skulle man erhålla en Y. K., som i fig. 25 betecknas med »Shunt», och om magnetiseringen endast skedde med serielindningen, skulle man erhålla den Y. K., som betecknats med »Serie». Compoundgeneratorns Y. K. erhålles approximativt genom addition av de spänningar, som erhållas med shunt- och serielindningarna var för sig. På grund av järnets mättning erhålles dock ett mindre värde än summan. Seriekurvans stigning är beroende av serielindningens lindningsvarvtal. Det är alltså möjligt, att vid maskinens konstruktion avpassa lindningsvarvtalet så, att compoundgeneratorns polspänning inom det normala

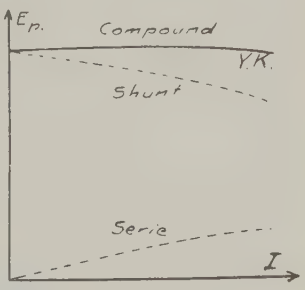


Fig. 25
Compoundgeneratorns Y. K.

arbetsområdet blir praktiskt taget konstant och alltså oberoende av strömleveransen. Den är i detta avseende överlägsen shuntgeneratorn. Det är även möjligt, att låta serieströmmen motarbeta shuntströmmen, varigenom erhålles en Y. K., som faller brantare än shuntgeneratorns. Dylika generatorer ha funnit användning vid parallelldrift med ackumulatorbatterier.

I följande nummer av tidskriften avslutas uppsatsen med en framställning av likströmsmotorernas driftsegenskaper.[1]

[1] För att bereda möjlighet att studera likströmsgeneratorers och motorers driftsegenskaper t. ex. vid det enskilda arbetet i gymnasiet har förf. anvisat en konstruktion av en universallikströmsmaskin på c:a 0,3 hkr, som nu saluföres av Norstedt och Söner. Maskinen är även försedd med fyra släpringar för uttag av växelström. Samtliga ledningars ändpunkter äro bekvämt åtkomliga. Sju olika lindningsvarvtal hos serielindningen kunna inkopplas; maskinens polspänning är c:a 75 V och normala varvtal 2 000 varv per min. Undersökningarna utföres lämpligast av en grupp på 3 à 5 elever.

En sats om plana kurvor.

S. WIGERT.

Låt P (fig. 1) vara en punkt v. s. h. på en given kurva. Dess rätvinkliga och rätliniga koordinater, x och y, kunna vi anse som funktioner av någon variabel. Antag vidare punkten P_1 vara så belägen, att $P_1P = P_1O$, där P_1P är normal i P till den givna kurvan och O en fix punkt, vilken vi välja till origo. Vi vilja då först uppställa ekvationerna för P_1:s ortkurva. Om koordinaterna för P_1 kallas ξ och η, så ha vi

$$\begin{cases} (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \eta^2 + \xi^2 \\ x'(\xi - x) + y'(\eta - y) = 0, \end{cases}$$

där x' och y' beteckna derivatorna av x och y med avseende på den variabel (parameter), varav de äro funktioner. Härav följer då

$$\begin{cases} x\xi + y\eta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ x'\xi + y'\eta = xx' + yy' \end{cases} \quad \text{samt} \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}\left(x - y\,\frac{xx' + yy'}{xy' - x'y}\right) \\ \eta = \frac{1}{2}\left(y + x\,\frac{xx' + yy'}{xy' - x'y}\right). \end{cases}$$

Dessa formler bliva särskilt enkla, när man inför polära koordinater genom att sätta $\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}$. Man har $\begin{cases} xx' + yy' = rr' \\ xy' - x'y = r^2 \end{cases}$ och således

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(r\cos v - r'\sin v) \\ \eta = \frac{1}{2}(r\sin v + r'\cos v). \end{cases}$$

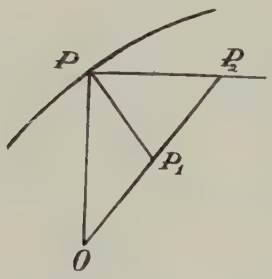


Fig. 1.

Om vi nu i punkten P draga en mot radius vector OP vinkelrät linie, så inses, att dess skärningspunkt, P_2, med den utdragna linien OP_1 kommer att bestämma ett avstånd $OP_2 = 2OP_1$. När P genomlöper den givna kurvan, få linierna PP_2 en envelopp, vilken har den givna kurvan till *tangentfotpunktkurva*[1] med avseende på O. Den förmodan ligger då nära till hands, att enveloppen just är orten för P_2. Och detta är verkligen fallet. Ty ekvationen för linien PP_2 är

$$x(\xi - x) + y(\eta - y) = 0,$$

och enveloppen fås genom att kombinera denna ekvation med

$$x'\xi + y'\eta = 2(xx' + yy').$$

Den kurva, som har den givna till fotpunktkurva, fås alltså genom att blott fördubbla radius vector i den kurva, vars punkter ligga lika långt från den givna som från punkten O.[2]

Som ett exempel vill jag behandla ellipsen $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$.

[1] ***Pedal curve*** enligt engelsk, *podaire* enligt fransk terminologi.

[2] Satsens innehåll var tidigare bekant (se t. ex. Björling: Diff.kalkyl, 4:de boken, kap. 6 § 168), men framställningen är här en annan.

Man finner här

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{a(1-e^2)}{2} \dfrac{\cos v + e\cos 2v}{(1+e\cos v)^2} \\ \eta = \dfrac{a(1-e^2)}{2} \dfrac{\sin v + e\sin 2v}{(1+e\cos v)^2} \end{cases}$$

och vidare

$$\begin{cases} \xi' = -\dfrac{a(1-e^2)}{2} \dfrac{\sin v(1+2e^2+3e\cos v)}{(1+e\cos v)^3} \\ \eta' = \dfrac{a(1-e^2)}{2} \dfrac{\cos v(1+2e^2+3e\cos v)}{(1+e\cos v)^3}. \end{cases}$$

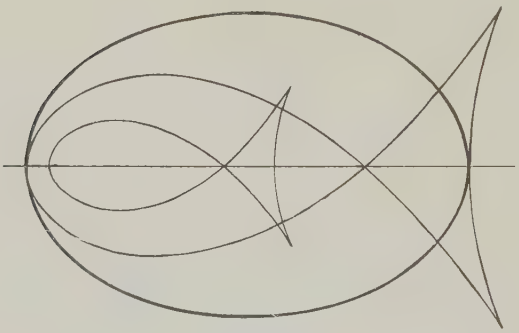


Fig. 2.

När $e \leqq \frac{1}{2}$, blir $\eta = 0$ endast för $\sin v = 0$. Men för $e > \frac{1}{2}$ har kurvan en dubbelpunkt på ξ-axeln, när $\cos v = -\frac{1}{2e}$, och två spetsar för $\cos v = -\frac{1+2e^2}{3e}$. För $e = \frac{1}{2}$ krymper hela den triangulära delen av kurvan ihop till en singulär punkt. Villkoret för att spetsarna skola falla utanför ellipsen, är $e > \sqrt{\frac{2}{3}}$. — Fig. 2 visar även den andra kurvan, som har ellipsen till fotpunktkurva med avseende på dennas focus.

Ett geometriskt problem — två lösningar.

Av **STIG COMÉT.**

C, c och c_0 äro tre givna cirklar, som tangera varandra två och två; deras radier äro resp. R, r och r_0. c_1 är en cirkel (radie $= r_1$), som tangerar C, c och c_0; c_2 (radie $= r_2$) tangerar C, c och c_1 (men är ej identisk med c_0), o. s. v. I allmänhet är c_n en cirkel (radie $= r_n$), som tangerar C, c och c_{n-1} (men ej är identisk med c_{n-2}). a) Sök en rekursionsformel för $\frac{1}{r_n}$. b) Sök det allmänna uttrycket för $\frac{1}{r_n}$.

Ovanstående problem låter sig mycket naturligt behandlas medelst teorien för rekurrenta serier (lösning I): I konstruktionen

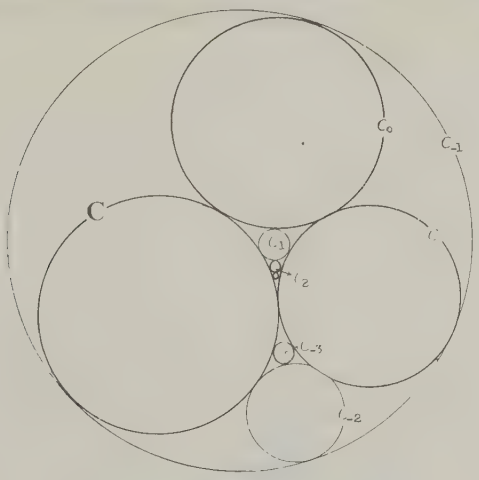


Fig. 1.

av cirklarna c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ligger en rekursion. Nu visar sig rekursionsformeln vara lätt att uppställa; lösning I är därför till största delen ett exempel på hur man räknar, då man ur rekursionsformeln vill bestämma seriens allmänna term.

Till svaret på frågan b) kommer man fram mera direkt medelst konform avbildning (lösning II). Därvid blir rekursionen i hög grad förenklad; lösningen utgöres till största delen av själva avbildningsproceduren.

Lösning I: Sätt för korthetens skull

$$\frac{1}{R}=T;\quad \frac{1}{r}=t;\quad \frac{1}{r_0}=t_0;\quad \ldots;\quad \frac{1}{r_n}=t_n.$$

a) Emedan C, c, c_{n-1} och c_n tangera varandra, gäller [1]

$$T^2+t^2+t^2{}_{n-1}+t^2{}_n-2Tt-2Tt_{n-1}-2Tt_n-2tt_{n-1}-2tt_n-2t_{n-1}t_n=0. \quad (1)$$

Analog relation gäller mellan T, t, t_{n-2} och t_{n-1}.[2] Subtraheras dessa relationer, framgår

$$(t_n+t_{n-2})(t_n-t_{n-2})-2T(t_n-t_{n-2})-2t(t_n-t_{n-2})-2t_{n-1}(t_n-t_{n-2})=0.$$

Emedan enligt förutsättningen $t_n \neq t_{n-2}$, måste alltså

$$t_n-2t_{n-1}+t_{n-2}=2(T+t). \quad (2)$$

Formeln (2) gäller för $n \geqq 2$. Om man förutsätter $n \geqq 3$, kan man även bilda

$$t_{n-1}-2t_{n-2}+t_{n-3}=2(T+t). \quad (3)$$

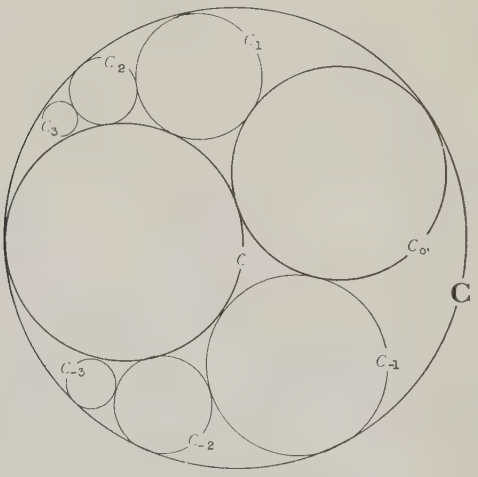


Fig. 2.

[1] Se problem nr 787, Elem. mat., fys. och kemi, årg. 18, sid. 270.
[2] Om någon cirkel tangeras innantill av de tre övriga, skall dess radie räknas negativ.

Genom subtraktion av (3) från (2) framgår

$$t_n - 3t_{n-1} + 3t_{n-2} - t_{n-3} = 0, \tag{4}$$

som är den sökta rekursionsformeln.

b) Talen t_n bilda en rekurrent serie med *relationsskalan* (4). Potensserien $\sum_{n=0} t_n x^n$ utgör då Maclaurin-utveckling av ett bråk [1]:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = \sum_{n=0} t_n x^n. \tag{5}$$

Multiplikation med $(1 - 3x + 3x^2 - x^3)$ ger nämligen:

$$f(x) = t_0 + (t_1 - 3t_0)x + (t_2 - 3t_1 + 3t_0)x^2. \tag{6}$$

Alla termer av högre grad försvinna på grund av (4); t_1, som ingår här, kan bestämmas ur (1) för $n = 1$:

$$t_1 = t_0 + T + t \pm 2\sqrt{Tt + Tt_0 + tt_0} = t_0 + T + t \pm 2L; \tag{7}$$

t_2 fås lättast ur (2) för $n = 2$:

$$t_2 = t_0 + 4(T + t) \pm 4L; \tag{8}$$

tecknen $\pm$ äro motsvariga. — Då blir (6):

$$f(x) = t_0 + (T + t - 2t_0 \pm 2L)x + (T + t + t_0 \mp 2L)x^2. \tag{9}$$

$\varphi(x)$ kan uppdelas i partialbråk:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^3} = \frac{A}{(1-x)^3} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-x}. \tag{10}$$

Genom jämförelse mellan (9) och (10) finner man konstanterna:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2(T + t) \\ B &= -3(T + t) \pm 2L \\ C &= t_0 + T + t \mp 2L \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Maclaurinutvecklingen av $\varphi(x)$ är nu:

$$\varphi(x) = A \sum_{n=0} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n + B \sum_{n=0} (n+1)x^n + C \sum_{n=0} x^n.$$

Då denna utveckling är densamma som (5), framgår

$$t_n = A \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} + B \cdot (n+1) + C$$

[1] Frågan om serieutvecklingens konvergens intresserar ej i detta sammanhang; man behöver blott veta, *att* det finns x-värden (i tillräckligt antal : inom ett intervall), för vilka serien konvergerar.

och slutligen, efter insättning av (11)

$$t_n = t_0 + n^2(T + t) \pm 2nL, \tag{12}$$

som är det sökta uttrycket. — Det gäller för $n \geqq 0$.

Dubbeltecknet $\pm$ beror på att c_1 i allmänhet kan placeras på två olika ställen och därför ger upphov till två olika serier. Om man indicerar den ena serien med negativa n, kommer (12) att innehålla endast ett tecken i st. f. $\pm$.

Ett speciellt enkelt fall, då $R > r$ och C tangeras innantill av de övriga cirklarna, är det, då $r_0 = R - r$. I stället för R och T skrives $-R$ och $-T$. Då blir

$$L = \sqrt{tt_0 - Tt - Tt_0} = \sqrt{\frac{R - r_0 - r}{Rrr_0}} = 0,$$

och (12) blir

$$t_n = t_0 + n^2(t - T),$$

d. v. s. ett helt, rationellt uttryck i t_0, t och T. Spec. om $r = r_0 = \frac{1}{2}R$, $\because t = t_0 = 2T$, fås:

$$t_n = (n^2 + 2) \cdot T; \quad \because r_n = \frac{R}{n^2 + 2}.$$

I detta fall fås f. ö. enkla uttryck för medelpunktens koordinater $(x_n; y_n)$ i c_n, om man lägger origo i tangeringspunkten mellan C och c, så att $+x$-axeln går genom medelpunkterna till C och c:

$$x_n = \frac{3R}{n^2 + 2}; \quad y_n = \pm \frac{2nR}{n^2 + 2}.$$

Lösning II: Det komplexa z-planet ($z = x + iy$) lägges med origo i tangeringspunkten mellan C och c, så att den positiva reella axeln går genom c-s medelpunkt (fig. 3). Medelpunkten för c_n är $z_n = x_n + iy_n$ ($n = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$).

Genom transformationen

$$w = u + iv = a\frac{z + 2R}{z}, \tag{13}$$

där

$$a = \frac{r}{R + r}, \tag{14}$$

avbildas den *utanför* cirklarna C och c belägna delen av z-planet konformt på den del av w-planet, som ligger *mellan* de räta linjerna $u = 0$ och $u = 1$. Den förra linjen motsvarar cirkeln C, den senare c. Dessa cirklars tangeringspunkt motsvaras i w-planet av en oändligt avlägsen punkt. x-axeln motsvaras av u-axeln. Då

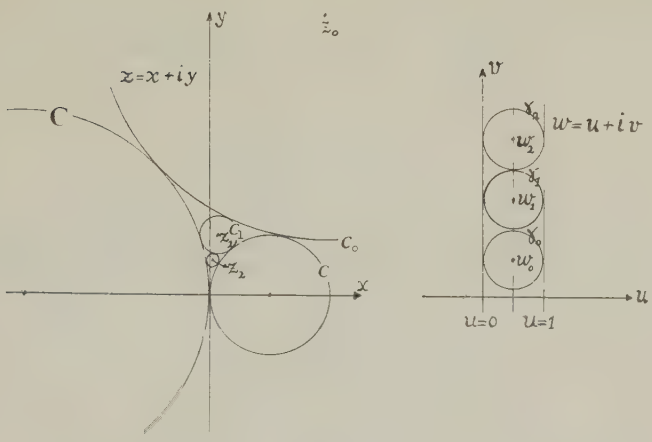


Fig. 3.

(13) är lineär, komma alla c_n att transformeras till cirklar (vi kalla dem γ_n) i w-planet, vilka alla tangera linjerna $u=0$ och $u=1$ samt varandra parvis; vid konform avbildning bli ju alla avbildade vinklar oförändrade. Radien i varje γ_n är $=\frac{1}{2}$, och medelpunkten i γ_n är $w_n=\frac{1}{2}+iv_n$. Här gäller, att

$$v_n=v_0+n, \tag{15}$$

(just emedan alla radierna äro $=\frac{1}{2}$) och det är denna enkla relation, som ersätter en rekursionsformel. Det återstår nu endast att här insätta v_n och v_0 uttryckta i r_n, r_0, R och r. Detta göres på följande sätt: Ekv. för γ_n är

$$|\, w-w_n \,|=\tfrac{1}{2}. \tag{16}$$

Transformerad tillbaka till z-planet (medelst (13)), ger den ekv. för c_n:

$$\left| a\,\frac{z+2R}{z}-\tfrac{1}{2}-iv_n \right| = \tfrac{1}{2}.$$

$$|\, ax+iay+2Ra-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}iy-iv_nx+v_ny \,| = \tfrac{1}{2}\,|\, x+iy \,|\,.$$

$$\left[x(a-\tfrac{1}{2})+v_ny+2Ra\right]^2+\left[-v_nx+y(a-\tfrac{1}{2})\right]^2=\tfrac{1}{4}(x^2+y^2).$$

$$(x^2+y^2)(a^2-a+v_n^2)+4x\,.\,Ra(a-\tfrac{1}{2})+4y\,.\,Rav_n=-4R^2a^2. \tag{17}$$

Men å andra sidan är ju som vanligt ekv. för c_n:

$$x^2+y^2-2xx_n-2yy_n=r_n^2-x_n^2-y_n^2.$$

Identifieras koefficienterna i ekvationerna (17) och (18), erhålles

$$\frac{-4R^2a^2}{a^2-a+v_n^2} = r_n^2 - 4R^2a^2\,\frac{(a-\frac{1}{2})^2+v_n^2}{(a^2-a+v_n^2)^2}.$$

Härav:

$$r_n = \overset{+}{(-)}\,\frac{Ra}{a^2-a+v_n^2}. \tag{19}$$

Här skall tecknet + väljas på grund av föreskrifterna för radiernas tecken: nämnaren blir <0, om och endast om c_n tangeras innantill av C och c.

$$\because\ v_n^2 = \frac{Ra}{r_n} - a^2 + a. \tag{20}$$

Speciellt

$$v_0^2 = \frac{Ra}{r_0} - a^2 + a. \tag{21}$$

Kvadreras nu (15) och insättas (20) och (21), erhålles

$$\frac{Ra}{r_n} = \frac{Ra}{r_0} + n^2 \pm 2n\sqrt{\frac{Ra}{r_0} - a^2 + a}.$$

Divideras denna relation med Ra och användes därefter (14), framgår

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_0} + n^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right) \pm 2n\sqrt{\frac{1}{Rr}+\frac{1}{Rr_0}+\frac{1}{rr_0}},$$

som är (12).

Uttrycken för x_n och y_n erhållas här mycket lätt (koefficienterna i ekvationerna (17) och (18)).

Till slut två anmärkningar:

1) Om C tangeras innantill av c och c_0, så avbildar (13) området *mellan* C och c på den del av w-planet, som ligger mellan $u=0$ och $u=1$. I detta fall räknas R negativ.

2) Frågan, om det bland cirklarna c_n finnes sådana, som tangeras innantill, besvaras lättast med hjälp av (19). I det fall, då C tangeras innantill av c och c_0 (varvid radien i C är $>$ radien i c), äro såväl R som a negativa; (19) ger alltså endast *positiva* r_n, d. v. s. c_n tangeras alla utantill (se fig. 2).

Antag C och c tangera varandra utantill. Då äro R och a positiva, och r_n kan möjligen bli negativ, nämligen om $v_n^2 + a^2 - a < 0$, d. v. s. enligt (14) och (15) om

$$(v_0+n)^2 < \frac{Rr}{(R+r)^2};\quad \because\ |\,v_0+n\,| < \frac{\sqrt{Rr}}{R+r} = b.$$

Emedan geometriska mediet till två positiva tal aldrig är större än talens aritmetiska medium, är $b \leqq \frac{1}{2}$. Vid ett givet v_0 kan det på grund härav ej finnas flera än *ett* heltalsvärde på n, för vilket

Fig. 4.

$|v_0 + n| < b$; d. v. s. det finnes *högst en* cirkel c_n, som tangeras innantill. För att det verkligen skall finnas *en* dylik fordras, att v_0 skiljer sig från ett heltal med mindre än b Skiljer sig v_0 från närmaste heltal med mera än b, bli alla $r_n > 0$ och alla cirklarna tangera varandra utantill (fig. 4). Är slutligen skillnaden mellan v_0 och närmaste heltal $= b < \frac{1}{2}$, finns det ett $n = m$, för vilket $r_m = \infty$: cirkeln c_m urartar till en rät linje; alla övriga r_n bli positiva. Om nämnda skillnad $= b = \frac{1}{2}$, vilket endast inträffar, om $R = r$, finnes det *två* konsekutiva n-värden, m och $m + 1$, för vilka $r_m = \infty$ och $r_{m+1} = \infty$; c_m och c_{m+1} bli två (parallella) räta linjer, medan alla övriga r_n bli positiva.

Om bestämning av värmets mekaniska ekvivalent medelst fallande blyhagel.

Försöket med fallande blyhagel i ett papprör är ju allmänt känt och praktiserat. Lika välbekant är, att försöket kräver särskilda försiktighetsåtgärder för att lyckas. Det förfaringssätt, som R. Lundblad anvisar i denna tidskrifts marshäfte 1936, sid. 29, är intressant och synes ge mycket goda resultat.

Vid Norra reallärоverket i Stockholm har med framgång använts en metod, som finnes beskriven av E. Foghammar i denna tidskrift (årg. 9, s. 212). Haglen inneslutas i en påse av starkt tyg och få falla från en viss höjd ett visst antal gånger, varvid temperaturstegringen mätes. Med hänsyn till värmeutbytet med omgivningen bör försöket ske kring rumstemperaturen, och försök i närheten av denna temperatur ge goda värden.

Vid reallärоverket ha vi funnit det instruktivt att ordna försöket så, att eleverna få klart för sig, vilken roll värmeutbytet med omgivningen spelar vid detta försök. Haglen avkylas något under rumstemperatur, påsen lyftes t. ex. 1 m och får falla mot hårt underlag först 20 gånger, så ytterligare 20 gånger o. s. v., varvid haglens temperatur mätes för varje etapp. Från en elevlaboration må anföras följande observationer:

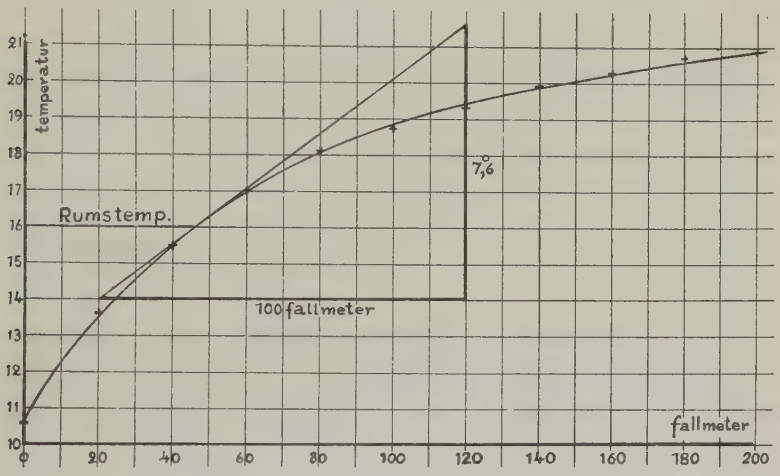
Fallmeter	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Temperatur	10°,6	13,6	15,5	17,0	18,1	18,7	19,3	19,9	20,3	20,7	20,9

Rumstemperaturen var under försöket 16°,0.

Resultatet framställes grafiskt (se fig.). Man borde få proportionalitet mellan temperaturförhöjning och antalet fallmeter, d. v. s. en rät linje, men finner på grund av värmeutbytet med omgivningen en krökt linje. Denna stiger först hastigt på grund av värmetillförsel från rummet och sedan långsammare på grund av värmeavgivning.

Värmeutbytet med omgivningen framstår på detta sätt mycket tydligt, och dess utslagsgivande betydelse för framgången av försöket blir för eleven fullt klar. Han inser, att det endast är värdena kring rumstemperaturen, som kunna användas vid beräkningen. Man ritar en tangent till kurvan vid rumstempera-

turen, och ur denna får man (se fig.) t. ex. den temperatursteg-ring, som svarar mot 100 fallmeter. Om ekvivalenten betecknas med x, haglens vikt med p och blyets spec. värme $= 0{,}032$, ger ovanstående försök 100 $p = x \,.\, p \,.\, 7{,}6 \,.\, 0{,}032$, varur erhålles $x = 411$.



Påsen måste vara av starkt tyg, annars går den lätt sönder. Det går även bra att helt enkelt taga några tygtrasor och knyta in haglen i dem. Påsen knytes lämpligen till medelst en bit gummislang, så att man kan sticka ned termometern utan att behöva öppna påsen. Haglen böra icke vara alltför stora och ej tagas till alltför sparsamt utan väl fylla ut påsen. De kylas exempelvis genom att placeras vid ett öppet fönster (på vintern) eller läggas i en bägare, som ställes på is. Termometern bör vara graderad i 0,1 grader. Påsen lyftes, så att dess underkant kommer 1 m över golvet, och släppes därefter. Då temperaturen tages, stickes termometern ned bland haglen, och man väntar någon minut med avläsningen, för att termometern skall hinna antaga haglens temperatur.

Lew Larsson.

Notis över en metod för kvalitativ analys av andra gruppens metaller.

Full skärpa har hittills ej uppnåtts med de gängse metoderna för kvalitativ analys av andra gruppens metaller. Sålunda ger zink-platina-förfarandet vid närvaro av endast små mängder antimon icke entydiga resultat. Enligt följande metod skiljas tenn och antimon med svavelväte i närvaro av fosforsyra. Den härvid uppkommande komplexföreningen tenn(IV)-fosforsyra har länge varit känd men synes ej ha kommit till praktisk användning i den kvalitativa analysen, varför ett påpekande om dess användbarhet synes mig vara befogat. I saltsur lösning och i värme är detta komplex så stabilt, att tennet icke kan utfällas med svavelväte, vilket försök av G. Vortmann och A. Metzl[1] tydligt utvisa.

De ur svavelammoniumlösningen med saltsyra utfällda och tvättade sulfiderna av andra gruppens metaller övergjutas med en ringa volym koncentrerad saltsyra. Man upphettar och kokar några sekunder, filtrerar utan utspädning genom ett härdat filtrum, kokar någon minut för avlägsnande av svavelvätet och utspäder med litet vatten. En mindre del av lösningen prövas på tenn enligt den vanliga metoden, d. v. s. med ferrum reductum och sublimat. Vid frånvaro av tenn utspäder man huvudlösningen och prövar på antimon med svavelväte. Är tenn närvarande, förfar man på följande sätt. Lösningen neutraliseras i en erlenmeyerkolv med en i värme koncentrerad sodalösning — i början lämpligen med fast natriumkarbonat — med fenolftalein som indikator. Den neutraliserade lösningen försättes med en lika stor volym fosforsyra (sp. v. 1,3) och därpå med koncentrerad saltsyra i en mängd, som noggrant utgör 1/5 av lösningens volym. Man upphettar till kokning, placerar kolven i en bägare med hett vatten samt inleder svavelväte. Är antimon närvarande, avskiljes omedelbart orangeröd antimonsulfid, under det att tenn stannar i lösningen.[2]

Den på filtret kvarvarande, i saltsyra olösliga fraktionen kokas energiskt med koncentrerad salpetersyra i rikligt överskott, varefter indunstas till liten volym. Lösningen prövas på arsenik med molybdenlösning.

Nils Löfgren.

[1] Z. anal. Chem. 44 (1905) 525.

[2] Även efter avsvalning är risken liten, att tenn skall utfalla. Först vid kraftig utspädning avskiljes den gula stannisulfiden.

Bokanmälningar.

Elis Strömgren och Bengt Strömgren, *Lehrbuch der Astronomie.* Julius Springer, Berlin, 1933, 555 s. Pris c:a kr. 38:—.

Det torde ej vara i vidare kretsar tillräckligt bekant, att sedan ett par år en grundläggande lärobok i astronomi existerar, som på ett mönstergillt sätt från grunden framlägger såväl de klassiska som de nyare delarna av ämnet. Verket är en väsentlig utvidgning av en tidigare på danska utgiven lärobok, som i sin tur var en utvidgning och modernisering av Mohns och Geelmuydens bekanta lärobok. Boken är avsedd dels att tjäna som inledning till vetenskapligt fackstudium vid universiteten, dels att ge en förenande länk mellan amatörastronomi och vetenskaplig astronomi. Framställningen är ur pedagogisk synpunkt synnerligen väl tillrättalagd, med särskiljande inom olika områden, så långt för sammanhanget varit möjligt, av en elementär översiktlig framställning och en framställning av strängare vetenskaplig karaktär, som för nybörjaren måste te sig svårare. Det torde vara svårt att för närvarande uppbringa tvenne författare, som vore bättre lämpade för en uppgift av denna art. Tillsammans täcka deras vetenskapliga verksamhetsområden de väsentliga delarna av astronomiens, inbegripet astrofysikens, vidsträckta domäner. Deras här refererade verk uppbäres emellertid samtidigt i hög grad av den erfarne undervisarens förmåga av klar och översiktligt ordnad framställning. Grunddragen i verkets disposition äro av ämnets natur givna, och det skulle innebära förkonstling att här eftersträva en högre grad av originalitet. Efter en allmän inledning, som innefattar översikt över de astronomiska instrumenten och över den sfäriska trigonometriens grundbegrepp, går framställningen över till den sfäriska astronomien, den inkörsport till det vetenskapliga studiet av astronomien, där särskilt stor pedagogisk förmåga hos handledaren är nödvändig, för att ej nybörjaren skall finna sin väg alltför mödosam och törnbeströdd. De centrala problemen på detta område, instrumentteori, koordinatsystem, tidens indelning, refraktion, präcession och skenbar rörelse på sfären m. m., behandlas med oöverträfflig elegans och klarhet. Följande kapitel behandla him-

melsmekanikens grunder, översikt över solsystemet samt slutligen stellarastronomi och astrofysik. I ett slutkapitel ges en sammanfattning av formler och satser inom teorien för observationsfel, teorin för interpolation och numerisk integration, den matematiska teorien för präcession och nutation, hjälptabeller av skilda slag, m. m.

Då framställningen är genomgående jämn och av högsta klass, är det omöjligt att uttaga något särskilt kapitel såsom överlägset andra. Vad som är särskilt ägnat att väcka tillfredsställelse är emellertid, att vi här ha fått en från grunden gående, men dock utförlig framställning av den moderna astrofysikens fundamentala problem. En sådan framställning har av naturliga skäl saknats i äldre läroböcker. Den snabbhet, varmed utvecklingen här gått fram under de sista decennierna, har gjort mycket väsentliga tillägg och modifikationer i den äldre framställningen nödvändiga. Teorien för stjärnornas ytlager och spektra på atomteoretisk grundval ges här i en framställning, vartill ingen existerande elementär lärobok ger ett motstycke. För en fysiker, även med ringa utbildning i astronomi, möter här givetvis ingen svårighet att följa framställningen. Beträffande teorierna för stjärnornas inre byggnad ges en översiktlig framställning på grundval av modernaste resultat. En liknande framställning kommer även den moderna stellarastronomien till del.

Verket har givetvis sin omedelbara användning som orienterande lärobok inom universitetsundervisningen, och användes för detta ändamål vid Stockholms Högskola såväl som vid övriga universitet i vårt land. Det har emellertid också en stor uppgift att fylla som orienterande handbok för läroverkens lärare vid den med fysiken förknippade undervisningen i astronomi.

Bertil Lindblad.

Pascual Jordan, *Anschauliche Quantenmechanik*, Julius Springer, Berlin 1936, XXX sid., RM 12:—.

Det är fråga om en framställning av kvantteoriens fysikaliska innehåll med begagnande av endast så mycket matematik som behöves för att ge läsaren en någorlunda ingående inblick i de fysikaliska sambanden. Vid en del formler, vilkas härledning skulle fordra vidlyftiga kalkyler, hänvisas sålunda till Borns och Jordans mera matematiskt betonade Elementare Quantenmechanik; men alltid får man en grundlig redogörelse för de erfarenheter och tankar, varpå formlerna vila.

Boken omfattar fem kapitel med överskrifterna: kvantfysikens grundexperiment, grundexperimentens teoretiska analys, kvant-

och vågmekanik, flerkropparteori och elementarpartiklar, atomer och organismer. Ur det rikhaltiga innehållet skall framhävas redogörelsen för strålningsfenomenen, där författaren bl. a. refererar sin och Kronigs intressanta teori för ljuset. På det hela taget präglas boken överallt av att den är skriven av en forskare, som själv lämnat bidrag av avgörande betydelse till ämnets viktigaste delar. För övrigt genomsyras hela framställningen av de Bohrska korrespondens- och komplementaritetssynpunkterna, varigenom åtskilligt blir satt på rätt plats även i historiskt avseende.

Enligt anmälarens mening måste man betrakta Jordans nya bok som ett synnerligen värdefullt bidrag till läroboksliteraturen på detta relativt svårtillgängliga forskningsområde — dock med någon reservation för det sista kapitlet, där författaren skildrar den i kvantteorien föreliggande allmänna kunskapsteoretiska situationen och dennas betydelse för andra kunskapsområden såsom biologi och psykologi. Det bör betonas, att detta kapitel icke ger ett adekvat uttryck åt Bohrs forskningar rörande dessa frågor, till vilka författaren anknyter sina betraktelser.

O. Klein.

Hans Rademacher och Otto Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*, Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik. Julius Springer, Berlin 1933. 2:a uppl., 173 sid., RM 7: 80.

Då Rademacher-Toeplitz' mycket förtjänstfulla bok icke tycks ha blivit observerad av denna tidskrifts anmälare, kan kanske ett, låt vara försenat, omnämnande av den (1:a uppl. utkom 1930) försvara sin plats.

De båda författarna ha lyckats finna en form av populär matematik, som skiljer sig avsevärt från, låt oss säga, Kleins systematiska »Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus». Jag skulle vilja kalla den matematisk novellistik.

»Von Zahlen und Figuren» erinrar något om Ahrens' »Mathematische Unterhaltungen und Spiele» och ännu mer om Nörlunds »Bland siffror och tal» men är ej så ytlig som den förra och ej så begränsad som den senare utan ger en både djup och rik inblick i väsentliga drag hos matematiken.

Det är självklart, vilket författarna också i förordet betona, att deras bok icke kan åsyfta att ge läsaren sammanhängande kunskaper utan endast kännedom om de matematiska problemens natur och metoderna att angripa dem. Ja, kanske inte så självklart. Då man populariserar andra vetenskaper, strävar man ju efter att delgiva läsaren de viktigaste resultat, som vetenskapen

uppnått. Ett sådant sätt att popularisera även matematik är naturligtvis tänkbart och nyttigt (se t. ex. K. G. Hagströms »Talens vetenskap», anmäld i denna tidskrifts årg. 13, sid. 38), men man har skäl att fråga sig, om lekmannen då får något annat än en ytlig resumé av resultaten och nyttan av dem. Av matematikens ofta överraskande frågeställningar, av dess skiftande metoder att angripa problemen, av dess olösta, ofta skenbart enkla men dock så djupgående frågor, om detta får han knappast något gott grepp. Han får en ytlig matematisk allmänbildning, men föga *förståelse* för matematiken, dess säregenhet och charm.

Denna förståelse är det just, som Rademacher och Toeplitz önska ge lekmannen, och jag hoppas och tror, att de lyckas, hoppas, därför att det är beklämmande att se matematikens vidsträckta och obestridliga impopularitet, tror, därför att deras »novellsamling» förefaller mig skickligt komponerad. I tjugotvå från varandra fristående uppsatser taga de i nyckfull följd upp frågor från matematikens alla grenar, från talteori, mängdlära, algebra, analys, geometri och topologi, kåsera icke blott kring dem utan ge dem ingående svar, och visa gärna, hur många svåra och olösta problem som även i enkla sammanhang kunna uppställas. De som läsa boken med det bestämda minnet från skolan, att matematiken är torr och död, upptäcka väl till sin häpnad, att den är full av liv.

Inte mindre än sju uppsatser behandla talteori, ett område, där man ju kan reda sig långt med enkla hjälpmedel. Bland annat behandlas primtalens oändliga antal, Fermats problem och de periodiska decimalbråken. Ett exempel, som visar författarnas strävan att gå till grunden med skenbart självklara saker, är 11:te uppsatsen: Kan ett helt tal på mer än ett sätt uppdelas i primfaktorer? Författarna äro smidiga nog att genast visa läsaren, att frågan icke är trivial. I ett talområde, som man får med hjälp av $\sqrt{-6}$, är det möjligt att på två olika sätt uppdela talet 6 i primfaktorer. Det nekande svaret på frågan innebär alltså en icke självklar egenskap hos de *hela* talen.

Fem uppsatser behandla maximi- och minimiuppgifter, av vilka några väl inte ha någon större betydelse men försvara sin plats som de små konstverk de äro. Här är det inte fråga om att stoppa in första derivatan i ett inlärt schema men att använda skiftande elementära metoder alltefter uppgiftens art. Endast ett exempel! I en given spetsvinklig triangel skall man inskriva en ny triangel med minsta möjliga omkrets. Genom en serie speglingar får man förbluffande enkelt klart, att den sökta triangeln har sina hörn i de tre höjdernas fotpunkter.

Tre uppsatser behandla topologiska frågor, vilket är av stort intresse för svenska läsare, då topologien i Sverige är en praktiskt taget okänd gren inom matematiken och ännu ingen svensk forskare ägnat sig åt den. Den behandlar de geometriska egenskaper, som förbli oförändrade hos en figur vid en entydig, kontinuerlig transformation av denna. Om vi ha ett stycke kautschuk och en figur fixerad i detta, fråga vi alltså i topologien efter de geometriska egenskaper hos figuren, som förbli oförändrade, då vi godtyckligt deformera kautschuken. — Följande problem (12:te uppsatsen) är berömt. Låt oss ha en karta vilken som helst. Vi skola färglägga de olika områdena på den med minsta möjliga antal färger på ett sådant sätt, att länder med gemensam gränssträcka aldrig få samma färg. Erfarenheten visar, att detta antal sannolikt är 4 (därav namnet »fyrfärgsproblemet»), men trots stora ansträngningar ha matematikerna icke lyckats finna ett bevis härför. I stället för att nu blott kåsera kring detta olösta problem i likhet med t. ex. Ahrens genomföra författarna ett strängt bevis för att kartritaren klarar sig med 5 färger.

Jag säger detta för att poängtera, att uppsatserna icke ha karaktären av kåserier. Även om språket är lätt och medryckande, läsas de icke utan ansträngning. Mycket små förkunskaper i matematik behövas dock, litet bokstavsräkning och de viktigaste satserna i realskolans geometri, och om dessa elementa blir man påmind, då man behöver dem. Det oaktat föres man djupt in i det svårtillgängliga område, som den högre matematiken onekligen är, ja, så djupt, att jag tror, att även matematikern av facket skall finna större delen av boken vara nyheter. För hans del finnas f. ö. sju sidor med anmärkningar och litteraturhänvisningar.

Man kan knappast undgå att i detta sammanhang fundera över den objektivt olösbara men centrala frågan, hur långt läroverkens matematikkurser kunna nedskäras, utan att eleverna berövas möjligheten till matematisk bildning, d. v. s. till egna studier i syfte att förstå, vilken särart av andligt liv som den rena matematiken representerar. Jag har nyss nämnt, vilka små kunskaper utöver folkskolans matematik som Rademacher-Toeplitz' verk kräver för att förstås. Det kan väl inte sägas vara anspråksfullt att önska dessa som minimum för en svensk student, och dock nå de nya »helklassikerna med grekiska» icke ens upp till detta.

Einar Lunell.

Nordisk Kultur: XXX. Mått och vikt. A. Bonnier, Stockholm 1936. 300 s., kr. 11:55.

Metrologien är en vetenskap, som griper in i nästan alla slag av mänsklig verksamhet. Den är så intimt förknippad med politisk och ekonomisk historia, med handel, hantverk, lantbruk, kreatursskötsel och samfärdsel, att det är svårt att i en sammanträngd form giva en klar sammanfattning av ämnet. Visserligen finnas sammanställningar, som avhandla mått, mål, vikt och mynt i olika länder och städer vid en viss tidpunkt, men dylika framställningar bli, trots vidlyftiga kompletterande tabeller, osäkra och sammanhangslösa, och de visa tydligt vilken oerhörd förvirring, som rått på dessa områden.

I det stora samlingsverket Nordisk Kultur ägnas 30:e bandet åt mått och vikt i Norden. Med Landsarkivarie S. Aakjær i Viborg som redaktör och medarbetare har en stab på 8 forskare från Sverige, Norge, Danmark, Island och Finland författat boken. En var har behandlat frågor, som beröra det egna landet. Sålunda har amanuensen vid Nordiska Muséet S. O. Jansson behandlat: »Mått, mål och vikt i Sverige till 1500-talets mitt», Riksarkivarien i Oslo, A. Steinnes: »Mål, vegt og verderekning i Noreg i millomalderen og ei tid etter», och ovan nämnde S. Aakjær: »Maal, vægt og taxter i Danmark». En för mät-teknikens historia värdefull liten uppsats av V. Hermansen behandlar mätningsredskap i danska muséer. Man återfinner där bl. a. den gamla öres-vikten på c:a 26,4 gram. Ett öre guld hade — enl. prof. Brøggers uppskattning — under äldre järnåldern ett värde, som nu för tiden skulle motsvaras av bortemot ettusen kronor! Brøgger behandlar den förhistoriska tidens mått- och viktproblem i Norge; materialet är huvudsakligen gravfynd. Redan bland dessa spåras en begynnande försämring av örets värde — guldvikten minskas från 26,4 till 24 gram under vikingatiden. Namnet *öre* kommer med guldet från den romerska kulturvärlden (solidus aureus).

För svenska förhållanden har det stora huvudverket sedan länge varit Falkman, Om mått och vigt i Sverige (Sthlm 1884—85), och S. O. Jansson giver detta verk den heder, som det förtjänar. Falkmans lärda arbete är baserat på otaliga excerpter, samlade under ett långt liv. Men uppgifterna äro stundom illa sovrade och ej alltid kritiskt bedömda. Falkman skulle kunna ha sagt med Herodotos: »Jag anser mig skyldig att berätta allt, även om jag ej tror allt». Jansson har med sitt arbete avsett att lägga en del dylikt föråldrat material till rätta, varför det närmast är att betrakta som ett modernt tillägg till redan

publicerat källmaterial, vilket icke i någon mån förringar dess värde. Han anvisar själv, var framtida forskning bör sätta in. Den personliga prägel, som utmärker Falkmans framställning, saknas ej helt hos Jansson; ibland blänker det till av skarp polemik.

S. Aakjær har lyckats att framlägga ett rikhaltigt material på mycket klart och överskådligt sätt, en i detta fall verkligt svår konst. Framställningen är att betrakta som mönstergill — trots att det måste anmärkas på ett litet fysikaliskt fel, som författaren dock ingalunda är ensam om: Han räknar med att 1 dm^3 vatten (vid 4°) väger 1 kg, om vägningen direkt utföres. Detta är ett djupt inrotat misstag, som må ursäktas med att de flesta elementära läroböcker i matematik och fysik framställa saken så. Aakjær skriver:

»Efter moderne Beregninger sættes imidlertid Vægten af $^1/_{62}$ Kubikfod fersk Vand til 499,175 Gram og man maa derfor med Asgaut Steinnes formode, at Vandets Vægtfylde er regnet 2—3 Gram for lavt i Ole Rømers Tid.» Räkna vi med en själländsk fot, som Aakjær själv sätter till 31,385 cm, blir volymen av $^1/_{62}$ kubikfot = 498,626 cm^3; och det finnes ingen möjlighet att väga upp denna vattenvolym med mässingsvikter så, att man får 499,175 g, därest man ej t. ex. använder havsvatten! Som tidigare utretts i denna tidskrift[1] torde vikten komma att ligga mellan gränserna 497,18 och 498,23 g. Gå vi till det åberopade citatet (sidnumret feltryckt; står: s. 21, skall vara: s. 16) finna vi, att Steinnes är offer för samma villfarelse, nämligen att metersystemets idealiserade relationer mellan vattnets vikt och volym även skulle gälla för vägningar i luft. Ole Römer bör frikännas. Steinnes räknar f. ö. med en annan längd på foten än Aakjær, nämligen 31,407 cm, och antager »eigenvekti 0,999 for ferskt vatn i vanleg stovetemperatur». Med dessa siffror nås visserligen ett något högre värde och talet 499,175 får sin förklaring, men det hela visar likväl nödvändigheten av att metrologerna vid sina beräkningar icke använda ett idealiserat metersystem utan hålla sig till den faktiska verkligheten, även om detta skulle kräva något mera eftertanke och räknearbete.

Verket, som är anmärkningsvärt billigt med hänsyn tagen till omfång och kvalitet, är väl värt att studeras även av en läsare, som ej är enbart inställd på att få del av numeriska data och sakliga upplysningar rörande mått och vikt. De talrika uppgifterna äro nämligen ofta åtföljda av förklarande notiser och anmärkningar av kulturhistorisk, språklig och annan art. Man

[1] Årg. 16 (1933) sid. 23.

kommer därvid osökt att tänka på ett av ungrenässansens illuminerade manuskript, där små bilder i klara färger kring kapitälerna fungera som illustrationer åt texten. Arbetet är i alla avseenden välkommet.

J. Tandberg.

A. Liljeström, *Teknikens naturvetenskapliga grunder,* Uppfinningarnas bok, Band I. P. A. Norstedt & söner, Stockholm 1935, 1370 sid., stor 8°, inb. kr. 35:—.

Denna imponerande volym av professor Alfred Liljeström bildar själva inledningsbandet till den nya helt omarbetade upplagan av Uppfinningarnas bok, som därmed föreligger färdig så när som på ett band. Den ger en utförlig och utomordentligt välskriven redogörelse för den allmänna naturvetenskapens, särskilt fysikens, utveckling genom tiderna.

Arbetet är uppdelat i nio stora huvudavdelningar: tiden, rummet, materien, kraften, rörelsen, ljudet, värmet, ljuset, magnetism och elektricitet. I vart och ett av dessa göres en sammanhängande historisk framställning ända fram till våra dagar. I viss mån ger även kapitelföljden en föreställning om den ordning, i vilken grundproblemen blivit aktuella för den forskande anden.

Redan den primitiva människan fångades av himlens växlande ljusfenomen, som gav henne föreställning om upprepandets art och vissa slag av periodicitet, som så småningom lades till grund för tideräkningen och ledde till konstruktionen av de första soluren.

Tidigt framträdde också behovet av längdmätningar, och så snart människorna kommo i närmare beröring med varandra, gör sig även den stora betydelsen av gemensamma mått gällande. I det gamla Egypten gåvo nödvändiga jordmätningar upphov till geometrien, och Greklands lärde utförde märkliga mätningar i världsrummet. De sista partierna av här berörda kapitel innehålla beskrivningar på moderna tids- och längdmätningsmetoder slutande med de Johanssonska normalmåttsatserna. Här finns även en ganska pikant redogörelse för svårigheten att bestämma de internationella standardmåtten, vilket även framkommer vid ett senare fastställande av de elektriska mätenheterna.

I kapitlet materien får man en överblick över de ämnen, särskilt metallerna och deras framställning, varom de äldsta kulturfolken hade en förvånande god kännedom. I antikens Grekland spekulerades över materiens urämnen och det tomma rummet. Demokritos' lära om de oförstörbara atomerna betraktades

som ett fantastiskt hugskott. Medeltidens alkemister ökade visserligen kunskaperna om de kemiska reaktionerna, men först på 1600-talet lades med Boyle grunden till den moderna kemiska vetenskapen, vars utveckling följes i stora drag. Dessutom behandlas olika vägningsprocedurer och vågar, hydrostatik och under rubriken 'materien som rumfyllande ämne' aerostatik.

Kapitlet kraften upptar de sätt på vilka människan från äldsta tider sökt att ta olika krafter i sin tjänst för att bruka dem på för henne förmånligaste vis. Där behandlas lagarna för krafters verkan och deras möjliga prestationer. Tanken att åstadkomma ett perpetuum mobile har dvalts i mången hjärna i alla tider, och dock har redan Aristoteles mer fördolt, Leonardo da Vinci fullt klart visat dess orimlighet.

Gjorde man, som framhålles i dessa kapitel, först mera fristående iakttagelser och erfarenheter, så framstod allt efter som tiden gick allt klarare det nära sambandet mellan de olika begreppen liksom deras relativitet. Tydligast visade sig detta vid studiet av rörelsen, i synnerhet sedan man med nyare tidens inbrott började söka efter orsakerna till rörelsens uppkomst och föränderlighet. I detta som i så många andra fall pekar förf. på att utvecklingen aldrig sker språngvis, utan steg för steg arbetar man sig fram till den åskådning, som i överensstämmelse med för varje tid kända förhållanden synes vara den naturligaste och enklaste. En genial ande kan visserligen spekulativt framkasta nya idéer, men de accepteras ej, förrän fastställda iakttagelser tvinga därtill.

Typiskt exempel härpå är framträdandet av de olika världsbilderna. Den geocentriska syntes antikens tänkare som den enda möjliga. Aristarkos' försök att utveckla den heliocentriska möttes då och under långa tider med idel förakt. Men till sist skulle noggranna iakttagelser med förbättrade instrument nödvändiggöra så många modifikationer, att enkelheten i den tidigare bilden helt försvann, och så kom, stödd även på närmare kännedom om dynamikens lagar, den heliocentriska åskådningen jämte Newtons gravitationsteori att avgå med segern. Ännu mer fulländade mätningar ha i sena tider lett fram till Einsteins relativitets- och gravitationsteori, där ljusets konstanta hastighet utgjort hållpunkten.

I det hela är avdelningen rörelsen en utmärkt och ingående lärobok i dynamik med klargörande utredningar, goda och träffande definitioner, varvid kanske särskilt må nämnas framställningen av accelerationsbegreppet, tröghetslagen, centrifugalkraften och snurrverkan. Gyrokompassen får bl. a. en mycket

ingående behandling, varvid framhålles, att »få uppfinningar torde vara bättre ägnade att visa, hur man från den 'principiella' men praktiskt otillfredsställande lösningen genom systematiska förbättringar skaffar sig kontroll över alla medverkande faktorer och därigenom når en tekniskt fullkomlig lösning.»

Även om människans förmåga att frambringa ljud är medfödd, är det först på 1600-talet, sedan Huygens' vågrörelselära tillämpats på ljudet, som man kan tala om verklig ljudlära. Motsvarande kapitel innehåller redogörelse för de vågrörelsetyper, som kunna frambringas genom olika slags deformationer. Här påpekas, hur man numera genom att upptaga svängande strängars profilkurvor kan rent matematiskt medelst harmonisk analys bestämma förekommande svängningskomponenter och så kännetecknа en sammansatt tons klangfärg, av oerhört stor betydelse för lösandet av de akustiska problemen. Dessutom förekommer intressanta avdelningar om ljudet som musik och dess tekniska utnyttjande i våra dagar i bl. a. ekolodning och ultrasonor-teknik.

Behovet av eld och värme har alltid gjort sig gällande, men rätt sent framträder några verkliga mätningar på detta område. Från 1600-talets början härstamma de första termometrarna, vilkas utveckling sedan följes. Man får veta, att Boyle ansåg värmet vara en i kropparnas inre försiggående oordnad, hastig rörelse hos smådelarna och att han bestämt vänder sig mot den gängse åsikten om värmet som ett ämne. Till Boyles uppfattning slöt sig även Newton. De under 1700-talet utförda, ingående kalorimetriska mätningarna förklarades emellertid utmärkt även med antagandet att värmet var ett oförstörbart ämne. Fastän Watt konstruerat ångmaskinen, Lavoisier och Laplace 1780 utvecklat den mekaniska värmeteorien i fullt modern anda och trots Rumfords talande försök, dröjde det mer än ett halvt sekel, innan termodynamiken helt brutit igenom. Då hade teknikens behov av fördelaktigt arbetande värmemotorer drivit fram synnerligen ingående forskningar. Carnot hade gjort sin epokgörande utredning om en motors möjliga arbetsprestation samt satsen om värmets och arbetets mekaniska ekvivalens experimentellt bekräftats. Det utomordentligt intressanta kapitlet om värmet och dess tillämpningar avslutas med redogörelse för termodynamikens huvudsatser, där förf. bemödat sig att framställa även de mera abstrakta begreppen i fattbar form. Sålunda definieras entropien under benämningen värmemängdens nyttovärde ur motorteknisk synpunkt, likaså den absoluta temperaturskalan.

Redan i forntiden var man klar över att ljuset gick fram rätlinigt, och iakttagelser ha gjorts på reflexion och brytning, men

det är ej förrän på 1600-talet som de exakta lagarna utformades, och de första optiska instrumenten sammansattes. Då utspelas också striden mellan Cartesius och Newton om färgernas uppkomst, varav här en livlig skildring ges, likaså om olika uppfattningar av ljusets natur. Newtons teori vederlades på 1700-talet kraftigt av matematikern Euler, som fullt anslöt sig till Huygens och förklarade ljuset vara en vågrörelse alstrad av eterpartiklarnas vibrationer och där färgerna motsvarade olika svängningstal. Därefter omtalas, vad det senaste århundradets polarisations- och allt mer fulländade interferens- och hastighetsmätningar betytt för uppfattningen om ljus och världseter.

Under rubriken ljuset som energiform behandlas fotometri, och ljusenergins olika omvandlingsformer ända till framställandet av den moderna ljudfilmen och television, dessutom lagarna för temperaturstrålning och kvantteori. En utförlig redogörelse för linser och optiska instrument avslutar kapitlet.

Den sista avdelningen magnetism och elektricitet upptar icke mindre än fjärdedelen av boken. Magnetens egenskaper och bärnstenskraften hade länge varit kända, men det är först kring år 1600 genom Gilbert och förnämligast på 1700-talet som de magnetiska och elektrostatiska fenomenen börja att mera ingående studeras om också delvis som roande sysselsättning. Från redogörelsen härför må särskilt antecknas, att potentialen definieras som ett spänningsbegrepp.

Galvanis och Voltas upptäckter samt elektrodynamikens snabba utveckling genom och efter Örsted skildras utförligt och spännande, varjämte man får en allmän översikt över de elektrodynamiska och elektrokemiska företeelserna och lagarna.

Vid ståndpunktstagande till olika hypoteser inom fysikens skilda delar ställes man oupphörligt inför frågan om fjärrkraftsverkan eller närverkan, och förf. har upprepade gånger tillfälle att framhålla det fysikaliskt orimliga i att tänka sig en ren avståndsverkan utan förmedling av mellanliggande medium. Han betonar, att Newton strävade efter att utarbeta en gravitationsteori, som tolkade gjorda iakttagelser, men att han ej menade att inlåta sig på en fysikalisk förklaring av gravitationen. Sålunda hade han aldrig förnekat möjligheten av mediets inflytande. Det var hans efterföljare, som hävdade att attraktionen var en ren avståndsverkan och framhöll Newton som fjärrkraftshypotesens geniale förkämpe gent emot Cartesius, vilken antog universum uppfyllt av subtila ämnen, som genom olika slag av rörelse, framåtskridande och virvlande, förmedlade gravitationen, ljus, värme, magnetiska och elektriska verkningar. Det påpekas

hur i Cartesii något förbryllande idéer man dock kan spåra senare tiders uppfattning.

I sina vetenskapligt så formfulländade arbeten gör sig Ampère snarast till tolk för fjärrkraftsverkan. Det är med omisskännlig värme förf. gent emot denna uppställer Faradays glänsande undersökningar, vilka dels lade grunden till starkströmstekniken, dels förde fram till hans kraftlinje- eller flödesteori, som sedan av Maxwell på ett så genialt sätt fördjupades och sattes i matematisk form. Professor Liljeström visar sig som den specielle experten, då det gäller att med hjälp av instruktiva kraftlinjediagram i möjligast elementära form framlägga Maxwells teorier för magnetiska och elektriska fält liksom för elektromagnetiska vågor. Bakom denna framställning ligger förf:s egna djupgående studier av Maxwells egna liksom hans tolkares, särskilt Heavisides, arbeten. Däri ingår även en klar och belysande utredning av vektorfältens geometriska och fysikaliska egenskaper, tillämpliga på så många områden inom fysiken.

Där den elektromagnetiska teorien kom till korta, vidtog elektronteorien i dess olika former. Denna behandlas under den intressanta rubriken »elektricitet och materia» i bokens sista avsnitt, som dessutom innehåller i ganska koncentrerad form elektricitetsledning genom gaser, radioaktivitet, elektronteknik och den moderna atomfysiken, vars långt drivna utveckling möjliggjorts av allt mer fulländade tekniska resurser, där Wilsonkammaren till och med registrerar händelser i atomernas allra innersta. Här göras många sammanställningar av stort intresse. Dock verkar det som om förf. ej haft tillfälle till samma grundliga bearbetning av detta område som de övriga. Det har nog insmugit sig enstaka oegentligheter i framställningen, något som annars synes förekomma ytterst sparsamt.

De stickprov ur det utomordentligt rika innehållet, som tagits ut, torde tydligt ge vid handen, att här föreligger ett verk av synnerligen förnämlig art, och man måste beundra förf:s förmåga att omspänna och behärska alla dess olika delar. Det är av oskattbart värde att på svenska språket ha fått en så fullständig och vederhäftig redogörelse för de grunder på vilka vår nuvarande högt utbildade teknik vilar. Därvid har förf. ej nöjt sig med andra-handsframställningar, utan i görligaste mån gått till själva källskrifterna och låter ofta genom citat forskarna själva tala. Till följd därav blir framställningen kanske någon gång väl vidlyftig, men den är alltid intresseväckande. Språkbehandlingen är utmärkt. Förf. besitter stor förmåga att med minsta möjliga användning av formler genom koncisa och klara beskrivningar

och belysande instruktiva exempel få fram innebörden även av ganska svårfattliga fysikaliska begrepp och lagar. Det ligger något medryckande i stilen, och mången gång inpassas träffande, kanske stundom något förbluffande anmärkningar, som ge färg åt det hela. Särskilt går förf. i härnad mot alla doktrinära åskådningar.

Det är skada att utrymmet ej kunnat tillåta medtagandet av någon litteraturförteckning. Praktiskt kunde det också varit, om vid tryckningen de olika kapitlen så inpassats, att möjlighet förefunnits av en uppdelning i flera band.

För alla, som önska fördjupa sina allmänna fysikaliska insikter, bör detta arbete bli till stort gagn i all synnerhet för lärarna i fysik. Vissa delar därav torde kunna ges till studium vid skolornas enskilda arbete. Detta monumentala verk bör därför ej saknas i något skolbibliotek. Man måste också säga, att priset är relativt hovsamt. Ett gott alfabetiskt register ökar bokens användbarhet.

Eva Ramstedt.

Sverre Bruun og Olaf Devik, *Lærebok i fysikk for realgymnasiet.* Mekanikk, 135 sid., Oslo 1934; Bølger, Lyd, Lys, 102 sid., Oslo 1935, Olaf Norlis forlag.

Även en elementär lärobok kan i ett och annat fall förtjäna uppmärksamhet utanför hemlandets gränser. En läsare, som tillhör en annan nation, ser den visserligen från andra synpunkter än den som dagligen skall använda den i klassen. Detaljerna träda tillbaka. Det är bokens planläggning i stora drag, själva greppet på ämnet, som kan intressera även på avstånd.

Bruun-Deviks värmelära var i detta avseende en märklig bok. Även dynamiken har samma personliga prägel. Mycket av den dynamik, som lärts och läres i våra skolor, kunde som bekant lika gärna kallas matematik. De båda norska författarna ha målmedvetet brutit med denna tradition. Den teoretiska behandlingen har inskränkts och gjorts mera elementär. Det experimentella får träda i förgrunden.

Den väg som valts kan måhända bli föremål för diskussion. Ganska mycket grundas på försök med kulor, som få rulla utför lutande plan. Detta är en väg, som anmälaren hittills ansett oframkomlig. En kula, som rullar utför ett lutande plan, erhåller endast $^5/_7$ av den acceleration, som erhålles vid glidning utan friktion, och en cylinder får blott $^2/_3$ av samma acceleration. Vid större lutningar inträffar både glidning och rullning. Accelerationen får

odefinierbara mellanvärden. Författarna ha emellertid träffat sitt val i fullt medvetande om svårigheterna och meddela siffror, som i någon mån kunna undanrycka grunden för kritiken. Det skulle otvivelaktigt vara av ganska stort värde, om man även i vårt land på något håll ville pröva författarnas uppslag. En början därtill är redan gjord av Herlin i 11:te årgången av denna tidskrift. Det är blott att beklaga, att den av honom utlovade uppsatsen om fallrännans metodik ännu inte kommit i tryck. Visar det sig verkligen, att man utan att offra den vetenskapliga renligheten kan följa den väg de båda norska författarna utpeka, skulle man här kunna göra den vinst man alltid gör, när man kan ersätta mer eller mindre abstrakta tankegångar med enkla konkreta experiment.

Mekaniken innehåller även statik och allmän fysik. I denna del är den för en läsare på denna sidan Kölen av något mindre intresse, emedan andra förkunskaper förutsättas hos lärjungarna än de vi ha att röra oss med. Dock kan strömningsläran vara värd att särskilt framhållas.

Författarnas lärobok i akustik och optik står till sin typ närmare de gängse framställningarna av ämnet. Dess största merit är att den så påtagligt strävar efter att utmönstra äldre lärostoff för att bereda plats för nyare material. Det är särskilt den geometriska optiken, som fått sitta emellan. Linsformeln begränsas till sin enklaste form och de optiska instrumenten ha fått nöja sig med en mycket knapp framställning, enligt anmälarens mening kanske alltför kortfattad. I stället finner man läsvärda stycken om epi- och diaskop, stumfilm och ljudfilm och i sammanhang därmed den fotoelektriska cellen. Beträffande vissa detaljer kunna väl avvikande meningar anmälas. Rec. känner sig t. ex. icke helt tillfreds med förf:s framställning av interferens i tunna hinnor eller de akustiska övertonerna, som blott studeras med Königs låga, och han skulle inte våga grunda läran om fasändringar vid reflexion enbart på försök med Lings vågapparat. Men det kan inte undanskymma lärobokens stora merit, att vara ett försök att skapa en modern optik av någorlunda begränsat omfång.

R. Lundblad.

Gradualavhandlingar.

GUNNAR ÅSSARSSON, *Die Entstehungsbedingungen der hydratischen Verbindungen im System CaO-Al_2O_3-H_2O (flüss.) und die Hydratisierung der Anhydrokalziumaluminate*, Stockholm, Sveriges Geol. Undersökn., Ser. C, N:o 399, 1936, 202 sid. Disp. i Stockholm den 26 maj 1936. Opponenter: docent G. HÄGG och ingeniör S. E. STERZEL.

Arbetet behandlar en undersökning av betingelserna för bildning av kalciumaluminathydrat, som föreligga, då anhydrokalciumaluminat behandlas med vatten. Undersökningen syftar mot ett praktiskt mål: en utredning av kalciumaluminatens roll vid cementets hydratisering.

De säkert påvisade kalciumaluminathydrat, som tillhöra systemet CaO-Al_2O_3-H_2O (fl.), äro åtta; därtill komma kalciumhydroxid och tre kristallina former av Al-hydroxid. Beträffande samtliga dessa föreningar fastställas deras egenskaper och sammansättning i och för identifiering i bottenkroppar av olika typ.

Kristallisationen av bottenkropparna ur de lösningar, som tillhöra systemet, sker enligt två förlopp, det ena sammanhänger med övermättning, det andra med hydrolytisk spaltning. Emellertid uppträda mycket ofta metastabila lösningar, som förorsaka, att kristallisationsförloppen överlagra varandra.

De uppträdande bottenkropparna nå mycket sällan verklig jämvikt med moderlösningarna, enär de flesta bottenkroppar reagera ytterst långsamt med systemets lösningar. Särskilda försök beträffande detta kunde därför endast bli indicerande.

Vid tillämpning av de vunna erfarenheterna beträffande lösningarnas egenskaper på hydratiseringen av anhydrokalciumaluminat kunde påvisas, att diffusionsskiktet närmast anhydrokornen (här kallat kontaktskikt) måste tillkomma vissa bestämda egenskaper, allt efter de omständigheter, under vilka hydratiseringen sker. Man kan alltså med ledning av kristallisationsförloppen förutse vilka produkter, som böra bildas, vilket är av betydelse i praktiskt hänseende.

En närmare undersökning av orsaken till kristallisationsföreteelserna hos kalcium-aluminatlösningarna är ett omfattande arbete. I samband med det ovan nämnda upptogs därför endast bestämningar av pH och elektrisk ledningsförmåga för att därur söka nå en preliminär uppfattning av det lösta kalciumaluminatets

konstitution. Det visade sig, att de av dessa bestämningar härledda beräkningarna antyda, att kalciumaluminaten förefinnas i lösningarna huvudsakligen som monoaluminat jämte en obetydlig mängd kalkrikare aluminat. Dissociationen av kalciumaluminaten i joner synes tyda på en association av joner eller odissocierade molekyler.

JARL KUUSINEN, *Wahrscheinlichkeitsberechnungen in der Kraft- und Wärmetechnik.* Acta Academiae Aboensis, Mathematica et Physica IX. 6, Åbo 1936. 142 s., 45 fig. (I Sverige genom H. Lindståhls Bokhandel, Stockholm, Sv. kr. 7:—.) Disp. vid Tekniska Högskolan i Finland den 29 maj 1936. Opponenter: professor BERNH. WUOLLE och fil. dr. E. J. NYSTRÖM.

Anordningar och kostnader för tillgodoseende av t. ex. en industris behov av kraft eller värme äro i hög grad beroende ej endast av behovets genomsnittliga storlek utan även av de maximala behoven under korta tidsperioder samt överhuvud av momentan- eller korttidsbehovens storleksfördelning, över vilken den s. k. varaktighetskurvan ger en fullständig bild. Vid projekteringar och kostnadsberäkningar är därför en förhandskännedom om dessa behovet kännetecknande data ofta högeligen önskvärd. Då totalbehovet av kraft eller värme oftast sammansättes av delbehov — t. ex. för enskilda maskiner och apparater —, vilka delbehov ej sällan variera oberoende av varandra, erbjuder sannolikhetskalkylen möjligheter att i dylika fall ur relativt lätt uppskattade data för delbehoven förutberäkna erforderliga statistiska data för det slumpvis sammansatta totalbehovet. Den föreliggande avhandlingen avser att för dessa beräkningar utveckla praktiskt användbara metoder.

Till en början utvecklas en grafisk metod för beräkning av varaktighetskurvan eller »sannolikhetskarakteristikan», såsom den här kallas, för en slumpvis sammansatt summa eller skillnad mellan tvenne storheter, för vilka karakteristikorna äro givna. För vissa specialfall angivas förenklade metoder. Som exempel anföres beräkningen av värme- och kraftbehoven i en cellulosafabrik. Beräkningsförfarandet generaliseras vidare för allmännare funktioner än summor och skillnader av de givna storheterna och som exempel anföres bl. a. beräkningen av ett vattenkraftverks effekt vid oberoende av varandra varierande nedrinning och nedre vattenstånd.

Beräkningen av medelvärden, spridningar och moment av högre ordning beskrives, speciellt för slumpvis sammansatta

summor och skillnader. Som ett exempel på användningen av härvid anförda lagar beräknas de resulterande strömvärmeförlusterna vid överföring av en elektrisk ström, vilken sammansättes av oberoende av varandra varierande delströmmar.

Lagarna beträffande formen hos sannolikhetskarakteristikan för en slumpvis sammanlagd summa av flere variabler beskrivas, varvid särskilt betydelsen hos den »Gauss'ska» gränsformen för kurvan uppmärksammas. Till underlättande av de Gauss'ska gränskurvornas uppritande meddelas diagram och dubbelskalor. De anförda asymptotiska lagarna utnyttjas för en förenklad, approximativ beräkning av karakteristikan för en slumpvis sammansatt summa av ett större antal variabler. Beräkningsmetoden utvidgas och exemplifieras även för tvådimensionala variabler.

Som underlag för behandlingen av spetsutjämningsproblemen införas sannolikhetskarakteristikor för varierande storheters tidsmedelvärden under godtyckligt förlagda tidsperioder av viss längd och beräknas speciellt för det fall att den ifrågavarande storheten utgör en summa av oberoende av varandra intermittent varierande storheter. Vidare beräknas karakteristikan och dess kännetecknande data för maximivärdena i slumpvis sammansatta värdegrupper. Enkla approximationsformler härledas för det fall att karakteristikan för samtliga värden har Gauss'sk form. De funna resultaten utnyttjas för förutberäkning av genomsnittsvärden på de på brukligt sätt medelst maximimätare fastställda maximivärdena hos slumpvis sammansatta belastningar. Som exempel anföres förutberäkningen av genomsnittliga spetsbelastningsavgiften för en belastning, sammansatt av ett större antal av varandra oberoende, intermittent drivna motorer, ävensom förutberäkningen av ökningen av spetsbelastningsavgifterna vid tillägg av en ny, oberoende delbelastning till en redan förhandenvarande, statistiskt undersökt, sammansatt belastning. Till slut hänvisas till möjligheterna att med anlitande av samma tankegångar, åtminstone approximativt behandla även andra sannolikhetsproblem i kraft- och värmetekniken, ss. ackumuleringsproblem o. dyl.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

864) *Visa, att*

$$\left[\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{[a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2]}, \ldots\ldots \frac{a_ib_k \quad a_kb_i}{[a_i,\ a_k,\ b_i,\ b_k]}, \ldots\ldots \frac{a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}}{[a_{n-1},\ a_n,\ b_{n-1},\ b_n]}\right] =$$

$$\frac{[a_1b_2 - a_2b_1, \ldots a_ib_k - a_kb_i, \ldots a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}]}{[a_1, \ldots\ a_n,\ b_1, \ldots\ b_n]},$$ *där* $a_1, a_2, \ldots a_n,$ $b_1, b_2, \ldots b_n$ *äro hela tal och parenteserna beteckna största gemensamma divisorn.* *Erik Berg.*

865) *I ett rätvinkligt koordinatsystem är x-axeln den gemensamma huvudaxeln för linserna i ett system, som avbildar enligt den elementära teorien. Vi betrakta lineära föremål, vinkelräta mot x-axeln. Ett sådant på* $x = 0$ *avbildas i naturlig storlek, men upp- och nedvänt på* $x = 7$*; ett föremål på* $x = 2$ *avbildas rättvänt och lika stort på* $x = 4$.

1:o Var ligga föremål och bild, då förstoringen är $m : n$?

2:o Var ligga föremål och bild, då skillnaden mellan deras abscissor äro a?

3:o Karaktärisera primära strålar, som äro parallella med tillhörande sekundära. *X.*

866) *I ekvationen* $y = x^3 + ax^2 + bx$ *äro a och b positiva storheter, underkastade villkoret* $a + b \leqq 6$. *Huru stor är sannolikheten, att funktionskurvan saknar maximi- eller minimipunkt?*

C.-E. Fröberg.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

Enklare matematiska uppgifter.[1]

Rättelse: En insändare har påpekat, att uppg. 345 årg. *13*, sid. 57) är med de uppgivna siffervärdena orimlig. Uppgiften bör lämpligen erhålla följ. lydelse:

En rät linje skär två mot varandra vinkelräta plan A och B i punkterna P och Q resp. Avstånden från P och Q till planens skärningslinje förhålla sig som $1 : \sqrt{2}$. Linjens projektioner på A och B förhålla sig som $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Beräkna de vinklar, som linjen bildar med planen.

Svar. 45° och 30°.

867) Hur stor är toppvinkeln i de likbenta trianglar, som genom en rät linje kunna uppdelas i två likaledes likbenta trianglar?

Svar: $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}$.

868) Ekvationen $x^3 + 3px + 2q = 0$ satisfieras av $x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$. Bestäm p och q, då de äro rationella tal.

Svar: $p = 2$; $q = -1$.

869) Visa, att $\frac{abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} \leq \frac{1}{8}$, om a, b och c äro positiva tal.

870) I en cirkel med medelpunkten O inskrives en fyrhörning $ABCD$, i vilken $AB = AD$ och $\angle BAD = 90°$. AO skär utdragen BC i E, varvid fyrhörningen $CDOE$ blir likformig med fyrhörningen $ABCD$. Beräkna förhållandet mellan deras ytor.

Svar: $2 + \sqrt{2}$.

871) Lös ekvationen $1 - 4\cos^3 v = 3\cos^2 v - 2\cos v$.

Svar: $180° + n \cdot 360°$; $\pm 50°{,}18 + n \cdot 360°$; $\pm 112°{,}98 + n \cdot 360°$.

872) Visa, att summan av serien $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \cot 2x + \operatorname{tg} 4x + \cot 4x + \ldots + \operatorname{tg} 2^n x + \cot 2^n x$ är $= \cot x - 2\cot 2^{n+1} x$.

873) Bestäm k så, att det x-värde, som gör funktionen $y = 4x + \frac{2}{2x - k}$ till ett minimum, blir tre gånger så stort som det x-värde, som gör samma uttryck till ett maximum.

Svar: $k = 2$.

[1] Uppg. 867—868 äro insända av *C. E. Fröberg*, 869 870, 873, 877 av *P.*, 871—872 av *Anders Larsson*, 874—876, 878 av *X.*, 879, 880 av *S.B.*, 881 av *T. Edqvist.*

874) I en given cirkel dragas kordorna $AB = AC = l$. Från en variabel punkt P på bågen AB fällas normalerna PM och PN mot dessa kordor. Hur lång är AP, då ytan av triangeln PMN är ett maximum?

Svar: $\frac{l}{\sqrt{2}}$.

875) Om k är en konstant $\neq 0$, definierar ekv. $y^2 + y \cdot f(x) = k^2$ två funktioner $y_1(x)$ och $y^2(x)$, för vilka $\left(\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2}\right)(y_1 - y_2)$ kan uttryckas i $f'(x)$ enbart.

Svar: $-2f'(x)$.

876) Från en godtycklig punkt P fällas normaler PN_1, PN_2, PN_3 mot sidorna i en liksidig triangel. Visa analytiskt, att tyngdpunkten till triangeln $N_1N_2N_3$ ligger mitt emellan P och den liksidiga triangelns mittpunkt.

877) En triangel har två hörn i punkterna (0; 3) och (6; 0). Det tredje hörnet glider utefter räta linjen $x + 2y + 3 = 0$. Vilka äro detta hörns koordinater, då avståndet från origo till triangelns tyngdpunkt är ett minimum?

Svar: (−4,2; 0,6).

878) I en regelbunden oktaeder förenas ett hörn A med tyngdpunkten B till en av de sidoytor, som ej gå genom A. Visa, att AB har en längd = oktaederns kant.

879) Från ett hörn O av en regelbunden oktaeder utgå i ordning kantlinjerna OA, OB, OC och OD. P och Q äro mittpunkterna av AB och OC. Vilken vinkel gör PQ med planet $ABCD$?

Svar: $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{0{,}2}$, varav $\alpha = 24°{,}10$.

880) Visa, att om a, b och c äro sidovinklar och α, β och γ motstående kantvinklar i ett tresidigt hörn, så är

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

881) En bil A kör på en rak väg med hastigheten v km/tim. En annan bil B med hastigheten V km/tim. söker köra om A. Omkörningen antages börja, när B är a m bakom A samt vara

avslutad, när B befinner sig a m framför A. Vardera bilens längd $= l$ m. Hur lång vägsträcka (x från B räknat) måste, när omkörningen börjar, vara fri från mötande fordon med hastigheten W km/tim., för att möte icke skall inträffa, medan omkörningen pågår?

Svar: $x = \frac{2(a+l)(V+W)}{V-v}$ m. Man kan sätta $W = 100$, $a = 10$, $l = 4$, $v = 30, 40, 50, \ldots 90$, $V = 40, 50, 60, \ldots 100$ samt upprita ett diagram, ur vilket man för olika v-värden kan avläsa x som funktion av V. Lägg märke till de stora x-värdena för små värden på differensen $V - v$.

Lösningar till uppg. 827—829.

827) *Cosinerna för vinklarna i en triangel förhålla sig som* $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. *Bestäm vinklarna.* *X.*

Sättes $\cos\alpha = \frac{1}{x}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{x}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{x}$, där α, β och γ äro vinklar i en triangel, erhålles av $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$,

$$\frac{\sqrt{3}}{x} = \pm\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{2}{x^2}\right)} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}$$

och efter förenkling

$$x^3 - 6x - 2\sqrt{6} = 0, \text{ varav } x = 2\sqrt{2}\cos\frac{30^\circ + 2k\pi}{3} \quad (k = 0;\ 1;\ 2).$$

För $k = 0$ fås den acceptabla roten $x = 2\sqrt{2}\cos 10^\circ$, varav

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}\cos 10^\circ};\quad \cos\beta = \frac{1}{2\cos 10^\circ};\quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cos 10^\circ} \text{ och}$$

svaret $\alpha = 68^\circ{,}96$; $\beta = 59^\circ{,}49$; $\gamma = 51^\circ{,}55$.

S. L.

Även löst av *C.-E. Fröberg, K. N.* och *E-d Smn.*

828) *Sök orten för inflexionspunkterna på kurvan* $y^2(1+ax^2) = 1 + x^2$, *då* a *varierar.* *X.*

Man får $yy' = \frac{(1-a)x}{(1+ax^2)^2}$ och $yy'' + y'^2 = \frac{(1-a)(1-3ax^2)}{(1+ax^2)^3}$.

Villkoret $y'' = 0$ ger $\frac{x^2(1-a)^2}{1+x^2} = (1-a)(1-3ax^2)$, varav $a = 1$ och $a = \frac{1}{x^2(3x^2+2)}$.

Kombination med den ursprungliga ekvationen ger för $a = 1$ linjeparet $y = \pm 1$. Efter elimination av a fås i senare fallet $x^2 - y^2 = -\frac{2}{3}$. Orten är sålunda en hyperbel.

S. L.

Även löst av *C. E. Fröberg, E-d Smn.* och *Anders Larsson.*

829) *Till hyperbeln* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ *drages en diameter med vinkelkoefficienten* $k \left(|k| < \frac{b}{a} \right)$ *samt dennas konjugatdiameter. Genom de fyra punkter, där de skära hyperbeln och dess konjugathyperbel, lägges en sådan andragradskurva, att de dragna räta linjerna bli konjugatdiametrar även till denna. Kurvans ekvation?* *Stig Comét.*

De fyra skärningspunkterna bli $\left(\pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} ; \pm \frac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \right)$ och $\left(\pm \frac{a^2k}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} ; \pm \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \right)$. Den sökta kurvan med centrum i origo, antages ha ekvationen $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$. Om k är vinkelkoeff. för en diameter härtill, så är $-\frac{A + Bk}{B + Ck}$ konjugatdiameterns vinkelkoeff. Följande tre ekvationer fås:

$$\left.\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2k} &= -\frac{A + Bk}{B + Ck} \\ A \,.\, a^2b^2 + 2Bka^2b^2 + Ck^2a^2b^2 &= b^2 - a^2k^2 \\ Aa^4k^2 + 2Bka^2b^2 + C \,.\, b^4 &= b^2 - a^2k^2 \end{aligned}\right\}.$$

Härur erhålles $Aa^2 = Cb^2 = \frac{b^2 + a^2k^2}{b^2 - a^2k^2}$; $B = -\frac{2k}{b^2 - a^2k^2}$ och den sökta kurvans ekvation

$$\left(b^2 + a^2k^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - 4kxy = b^2 - a^2k^2.$$

Den är en ellips, ty $AC - B^2 = \frac{1}{a^2b^2} > 0$, och emedan $|k| < \frac{b}{a}$, betyder den en reel ellips.

S. L.

Även löst av *C. E. Fröberg.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1936.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationen $6x^2 - 2ax - 7bx + ab + 2b^2 = 0$.
2. Två punkter röra sig rätlinigt från ett gemensamt utgångsläge med de respektive hastigheterna 6 m och 7 m per sekund och i riktningar, som bilda en vinkel av 75°,5 med varandra. Efter hur lång tid är avståndet mellan de båda punkterna 32 m?
3. En triangel har sidorna 15, 16 och 17 cm. En cirkel, som har sin medelpunkt på den största sidan, tangerar de båda övriga sidorna. Huru stor är denna cirkels radie?
4. En statsskuld, som vid början av ett år var 7 300 000 kr., skall med 4 procents ränta betalas under loppet av 12 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Hur stor är den årliga inbetalningen?
5. I en rätvinklig triangel delas hypotenusan av tangeringspunkten för den inskrivna cirkeln i delarna 5 cm och 12 cm. Beräkna avståndet mellan medelpunkterna till triangelns in- och omskrivna cirklar.
6. I triangeln ABC är $AB = 5$ m, $AC = 3$ m och vinkeln $A = 36°,87$. CB förlänges över B sträckan $BD = AB$. Beräkna vinkeln CAD.
7. En av vinklarna i en liksidig triangel är genom en rät linje delad i förhållandet 4:5. Bestäm förhållandet mellan de två delar, i vilka denna linje delar den motstående sidan.
8. I ett rätvinkligt, fyrsidigt prisma äro basytornas kanter 3 cm och 4 cm. samt höjden 5 cm. Huru stor är hela ytan av den pyramid, som har gemensam basyta med prismat och toppen i mittpunkten av prismats övre basyta?

Resultat: 1. $\frac{a+2b}{3}$ och $\frac{b}{2}$. 2. 4,00 sek. 3. 7,095 cm. 4. 777 800 kr. 5. $\frac{\sqrt{85}}{2} = 4{,}610$ cm. 6. 54°,22. 7. 0,817. 8. 49,04 cm².

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

a) *1933 års undervisningsplan.*

1. En triangels sidor äro 14 cm, 30 cm, 40 cm. Kring triangeln är en cirkel omskriven. Huru stor är ytan av det utanför den längsta sidan belägna cirkelsegmentet?
2. Beräkna log 45, då man vet, att $\log 24 = a$ och $\log 54 = b$. Med beteckningen log avses 10-logaritmen.
3. Ett lån å 60 000 kronor, å vilket $3\,^1/_2$ % årlig ränta på ränta beräknas, skall amorteras på 25 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Huru stor summa av den tionde inbetalningen åtgår till täckande av räntan under det tionde året?
4. Två räta koner ha gemensam basyta. Den ena konens höjd är fyra gånger så stor som den andras, och dess toppvinkel är hälften av den senares. Sök förhållandet mellan deras mantelytor.
5. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen
$$\cos^2 x - \sin^2 x = \tfrac{8}{5}\ (1 + \operatorname{tg} x).$$
6. På periferien till en given cirkel avsättes bågen $AB = 90°$. En punkt B_1 på denna båge sammanbindes med B, och parallellt med BB_1 drages kordan AA_1, varvid den mellan dessa kordor liggande delen av cirkeln blir $\frac{1}{5}$ av hela cirkelytan. I vilket förhållande delas bågen AB av punkten B_1?
7. Bestäm värdet på m så, att den parallellogram, som bildas av linjerna
$$4x - 7y = m; \quad 4x - 7y = 16; \quad x + 8y = 10; \quad x + 8y = 6,$$
får mot varandra vinkelräta diagonaler.
8. En triangel bildas av tangenten och normalen i origo till kurvan $y = x\ (x - 1)\ (x - 2)$ samt av tangenten till kurvan i dennas skärningspunkt med den förstnämnda tangenten. Hur stor är triangelns yta?
9. I en triangel ABC drages en transversal DE parallell med BC. Från D, som ligger på AB, drages transversalen DF parallell med AC och från E transversalen EG parallell med AB. Sök läget av D, då ytan av parallelltrapetset $DEGF$ får sitt maximivärde. ($AD > \frac{1}{2} AB$.)

Resultat: **1.** 1684 cm². **2.** $\frac{1}{8}\ (8 - 5a + 7b)$. **3.** 1541 kr. **4.** $\frac{1}{3}\sqrt{24}$. **5.** $135° + \text{n. } 180°$; $116°{,}57 + \text{n. } 180°$; $18°{,}43 + \text{n. } 180°$. **6.** 2:3. **7.** 12 och 20. **8.** $\frac{405}{46}$ ytenheter. **9.** $AD = \frac{2}{3}$ av AB.

b) *1928 års undervisningsplan.*

1. En cirkels ekvation är $5x^2 + 5y^2 = 68$. Bestäm skärningspunkten mellan tangenterna till cirkeln i de punkter, där cirkeln skäres av linjen $y = 2x + 2$.
4. En parabels normaler i punkterna P_1 och P_2 råka axeln i Q_1 och Q_2 resp. Man uppritar cirkeln C_1, som har radien Q_1P_1 och centrum i Q_1, samt cirkeln C_2 med radien Q_2P_2 och centrum i Q_2. Visa, att tangenten till C_2 från P_1 har samma längd som tangenten till C_1 från P_2.

Uppg. 2, 3, 5—9 desamma som motsvarande uppg. enligt 1933 års undervisningsplan (se ovan).

Resultat: 1. $-13{,}6$; $6{,}8$.

Uppgifter i fysik.

Obs.! Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En kropp, vars vikt är 100 kg, glider utan begynnelsehastighet utför ett lutande plan, vars höjd är 3,0 m, och når planets bas med en hastighet av 1,8 m/sek. Beräkna den värmemängd, uttryckt i kcal, som därvid alstras på grund av friktionen.
2. Ett hissblock består av en lina och två lätta blocktrissor A och B med tillhörande krokar. Linans ena ända är fästad i taket i ett rum. Därifrån sträcker den sig först rätt nedåt, omsluter därefter den nedåtvända hälften av omkretsen till trissan A, fortsätter sedan cirka 1 m rätt uppåt, omsluter därefter den uppåtvända hälften av omkretsen till trissan B, varefter slutligen dess sista del hänger rakt ned och uppbär en tyngd $P = 3{,}00$ kgf. Kroken till B är fästad i taket. Trissan A jämte tillhörande krok och en däri upphängd tyngd Q uppbäras av linan. Sammanlagda tyngden av trissan A med dess krok och tyngden Q är 5,00 kgf. Om P fasthålles så, att dess nedersta del befinner sig 1,00 m över golvet, och släppes utan begynnelsehastighet, huru länge dröjer det då, innan P når golvet? Linans tyngd och friktionen lämnas utan avseende.
3. En gastermometer består av en glasballong, fylld med vätgas, och en kvicksilvermanometer, genom vilken gastrycket bestämmes. På manometerröret, nära det ställe, där detta inmynnar i glasballongen, finnes ett märke. När trycket avläses, tillser man, att den kvicksilveryta, som befinner sig i beröring med vätgasen, står i jämnhöjd med detta märke. Glasballongen var

först inbäddad i smältande snö; gastrycket befanns då vara 1 002 mm nollgradigt kvicksilver. Därefter infördes glasballongen i ett rum med högre temperatur, varvid trycket steg till 1 786 mm nollgradigt kvicksilver. Beräkna temperaturen i detta rum. Glasets volymsutvidgningskoefficient är 0,000025. Volymen av den del av rörledningen, som ligger mellan glasballongen och märket på röret, kan försummas.

4. Ett vertikalt, långt och tämligen vitt glasrör är i övre ändan öppet, i nedre ändan förbundet med en gummislang, genom vilken vatten till önskad höjd kan tillföras röret. Hålles en ljudande stämgaffel med svängningstalet 435 över rörmynningen, kommer den ovanför vattenytan i röret befintliga luftpelaren i resonans för tvenne olika lägen av vattenytan, vilkas avstånd är 391 mm, men icke för något mellanliggande läge. Beräkna ljudets hastighet i luftpelaren vid tillfället ifråga.
5. En sfärisk konkav spegels radie är 10 cm, dess öppning 60°. En punktformig ljuskälla befinner sig på huvudaxeln på 30 cm avstånd från spegelns mittpunkt. Hur stort är avståndet mellan den punkt, där de yttersta randstrålarna skära huvudaxeln, och den punkt, där centrala strålar skära huvudaxeln?
6. Från en båt, som låg stilla på en sjö med mycket klart vatten, kunde man vid vindstilla tydligt se föremålen på sjöns botten. En person ombord företog sig att bestämma vattendjupet på följande sätt. En tub, som förstorar 24 gånger, inställdes först skarpt på ett avlägset föremål, varvid avståndet mellan objektiv och okular var 50 cm, och därefter i vertikal riktning på ett föremål på sjöbottnen. I senare fallet måste okularet utdragas 3,0 cm. Avståndet mellan objektivet och vattenytan var 216 cm. Huru stort var vattendjupet vid föremålet i fråga? Ögat var i båda fallen ackommoderat för seende på oändligt avstånd.
7. Hos en Wheatstones brygga är längden av mättråden AB 1 m. Galvanometerns ena klämskruv är förenad med glidkontakten C. Den andra klämskruven D är förenad med mättrådens ändpunkter A och B genom de motstånd AD och BD, som skola jämföras. Båda dessa äro obekanta. Då glidkontakten inställts så, att AC är 40,0 cm, gör galvanometern ett visst utslag. Strömlöshet i galvanometern kan åstadkommas antingen genom förskjutning av glidkontakten 3,0 cm eller genom inkoppling av ett motstånd på 17,0 ohm mellan A och D, parallellt med det förut där befintliga motståndet. Beräkna de bägge från början i grenarna AD och BD insatta motstånden.
8. Genom en seriekopplad likströmsmotor ledes en ström av 0,4 A. Denna ström är för svag att sätta motorn i gång. Potentialdiffe-

rensen mellan motorns polskruvar är då 0,22 volt. Sedan inkopplas motorn i ett ledningsnät av 220 volts spänning. Då den levererar en effekt av 10 hästkrafter, är dess verkningsgrad 92 %, d. v. s. 92 % av den ingående elektriska effekten utgår som mekanisk effekt. Hur stor är den i motorn uppkommande motelektromotoriska kraften?

Resultat: 1. 0,664 kcal. 2. $\sqrt{\frac{17}{9{,}81}} = 1{,}32$ sek. 3. 216°,3. 4. 340 m/sek. 5. 0,48 cm. 6. 800 cm. 7. 2,24 Ω; 2,97 Ω. 8. Vid uppgiven effekt, nätspänning och verkningsgrad kräver motorn 36,17 A, varvid det inre ohmska spänningsfallet skulle bli 19,9 V och motelektromotoriska kraften 200,1 V. Vid denna strömstyrka bleve emellertid enbart kopparförlusterna (det i ankare och fältmagneter utvecklade värmet) större än 8 %, som uppgives vara hela förlusten. Man utbyter lämpligen 220 V mot 440 V, då motemk blir 430 V.

Realexamen H. T. 1936.

Provräkning.

1. Förenkla uttrycket $(2x + y)^2 - x(3x + 5y)$ och beräkna dess värde för $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
2. En svensk affärsman köpte varor för 600 tyska mark (rmk). Han sålde samma varor strax därpå för 12 000 finska mark (fmk). Huru stor blev därvid hans procentuella vinst? 100 rmk = 155 kr. och 100 fmk = 8,6 kr.
3. Om en koppartråd böjes i form av en kvadrat, blir den inneslutna ytan $20\frac{1}{4}$ dm². Hur stor blir den, om tråden i stället böjes i form av en liksidig triangel?
4. Två växlar lydde på sammanlagt 2 000 kr. Båda diskonterades i en bank efter 4 % samma dag, som de utställdes. Den ena växeln var utställd på 3 månader, den andra på 5 månader. På vilket belopp lydde vardera växeln, om banken köpte dem för sammanlagt 1 974 kr.?
5. Lös ekvationssystemet: $\begin{cases} \frac{2x}{2x+3} = 2 - \frac{3y+2}{3y} \\ \frac{x-3}{5+x} = \frac{y-(5-x)}{x-3+y} \end{cases}$
6. En person vinner vid slutet av ett år 20 000 kr. på lotteri. Av vinsten får han betala 10 % till skatter, då han lyfter pengarna på lotten. Av återstoden placerar han 10 000 kr. i inteckningar,

som ge $4\frac{1}{4}$ % i ränta. Vidare köper han 7 st. 3,5 %-obligationer å nominellt 1 000 kr. vardera till en kurs av 104 %. Resten av pengarna insätter han i sparbank mot $2\frac{3}{4}$ %. Huru stor blir hela hans ränteinkomst under följande år? Samtliga räntor (även årets obligationsräntor) tänkas utbetalade vid detta års slut.

7. Sidorna i en triangel ABC uppmätas till $AB = 10$ cm, $AC = 21$ cm och $BC = 17$ cm. Höjden mot sidan AC befinnes vara 8 cm. Huru stor är ytan av en med triangeln ABC likformig triangel, vars omkrets är 120 cm?
8. I ett halvklot, vars radie är 1 dm, har man gjort en urborrning i form av en kon, vars basyta helt och hållet sammanfaller med halvklotets basyta och vars spets ligger mitt på den radie, som kan dragas vinkelrätt mot basytan genom dess medelpunkt. Beräkna hela begränsningsytan av den kropp, som återstår efter urborrningen. $\pi = 3{,}14$.

Resultat: 1. $x^2 - xy + y^2$; 9. 2. $11{,}\underline{0}\,(10\,\frac{90}{93})$ %. 3. $9\sqrt{3} = 15{,}59$ dm². 4. 1100 och 900 kr. 5. $x = 3$; $y = 2$. 6. 689,8 kr. 7. 525 cm². 8. $2\pi + \frac{\pi\sqrt{5}}{2} = 9{,}79$ dm².

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. En stång är rörlig i ett vågrätt plan kring en vertikal axel genom ena ändpunkten. Två horisontella krafter om 12 och 18 kgf, som äro vinkelräta mot stången, påverka denna på respektive 2 m och 3 m avstånd från axeln. Man vill ersätta dem med en enda kraft, som skall angripa 2,5 m från axeln, likaledes vinkelrätt mot stången. Angiv kraftens storlek, om de ursprungliga krafterna äro riktade a) åt samma håll, b) åt motsatta håll.
2. För att bestämma spec. vikten av en människas blod låter man en bloddroppe falla ned i en lämplig vätska med större spec. vikt än blodet, t. ex. kloroform. Droppen flyter då upp. Tillsätter man under omröring — utan att förstöra bloddroppen — en vätska, som har mindre spec. vikt än blod, t. ex. bensol, kan man avpassa blandningens spec. vikt så, att bloddroppen håller sig svävande utan att vare sig flyta upp eller sjunka. Därefter bestämmer man spec. vikten hos blandningen av de båda vätskorna, t. ex. med en pyknometer. Om pyknometern väger tom 24,78 g, fylld med vatten 74,89 g och fylld med vätskeblandningen 77,65 g, hur stor är blodets spec. vikt?

3. När den av propellern i en undervattensbåt avgivna effekten är 600 hästkrafter, är båtens hastighet i undervattensläge 10 knop. Hur stort är vattnets motstånd? 1 knop = 1 852 m/tim; 1 hästkraft = 75 kgm/sek.
4. Ett lokomotiv skjuter vid växling framför sig en godsvagn utan att vara sammankopplat med denna. När en viss hastighet uppnåtts, bromsas loket. Vagnen skiljer sig då från detsamma och fortsätter 75 m, innan den stannar på grund av friktionen. Hur stor var vagnens hastighet, när den skildes från loket? Banan kan anses vara horisontell och friktionsmotstånden ½ % av vagnens tyngd. 1 gramkraft = 981 dyn.
5. En simbassäng är 30 m lång och 10 m bred. Vattnets djup är i medeltal 2 m. När vattnet ledes in i bassängen, har det temperaturen 8°; det skall uppvärmas till 19°. Vad skulle elektrisk uppvärmning av vattnet kosta, om priset per kWh är 12 öre? Man kalkylerar med en verkningsgrad av 100 %. 1 wattsek är lika med 0,24 gramkalorier.
6. En glasburk kan tillslutas lufttätt med en gummiring, som lagts mellan burken och locket. Burken, som innehåller litet vatten, är först öppen. Den upphettas, så att vattnet kommer i kokning och all luft utdrives. Då påsättes locket, varefter burken får avsvalna till 18°. Med vilken kraft kvarhålles locket? Burkens inre genomskärningsyta är 70 cm², barometerståndet 755,5 mm, och vattenångans mättningstryck vid 18° 15,5 mm kvicksilver. Spec. vikten för kvicksilver är 13,6.
7. Ackumulatorbatteriet i en bil har elektromotoriska kraften 6 volt och inre motståndet 0,05 ohm. Man vill använda det att ladda två seriekopplade celler i en handlykta. Vardera cellen har elektromotoriska kraften 1,3 volt och inre motståndet 0,02 ohm. Laddningsströmmen skall vara 1,2 ampère. Hur stort motstånd måste då inkopplas i serie med batteriet och cellerna?
8. Motståndstråden i en elektrisk kastrull har en kontakt i vardera ändan samt en på mitten av tråden. Man vet, att effekten blir 200 watt, om de båda ändkontakterna anslutas till ett belysningsnät. Om man nu ändrar kopplingen, så att mittkontakten anslutes direkt till nätets ena pol och båda ändkontakterna till den andra, hur stor blir då effekten?

Resultat: 1. a) 31,2 kgf., b) 12 kgf. 2. 1,055. 3. 8,75 tonf. 4. 2,71 m/sek. 5. 917 kr. 6. 70,4 kgf. 7. 2,74 ohm. 8. 800 watt.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.[1]

1. Redogör för arbetsförloppet i cylindern till en fyrtakts dieselmotor.
2. En pump skall uppfordra 5 000 liter vatten i minuten. Totala manometriska uppfordringshöjden är 15 meter. Pumpens verkningsgrad är 70 %. Pumpen drives direkt av en elektrisk motor, vars verkningsgrad är 82 %. Beräkna effektförbrukningen i kW.
3. En motor med 150 mm remskiva gör 1 425 varv pr minut och skall över en mellanaxel driva en arbetsmaskin, som har 600 mm skiva och skall göra 150 varv pr minut. Giv förslag till dimensioner för mellanaxelns remskivor.
4. En lintrumma till ett hisspel har 500 mm diameter. Trumman drives med en snäckväxel, vars skruvhjul sitter på trummans axel. Skruvhjulet har 60 kuggar. Skruven är dubbelgängad. Spelets totala verkningsgrad är 60 %. Huru stort vridande moment erfordras på skruvens axel för att lyfta en last i linan på 800 kg?
5. En ångpannas manometer visar 10 kg/cm². Ångförbrukningen är 1 000 kg i timmen. Bränslets värmevärde är 7 000 kcal/kg. Matarvattnets temperatur antages vara 0°. Pannans verkningsgrad är 75 %. Beräkna bränsleförbrukningen pr timme. (Använd ångtabell!)
6. En transmissionsaxel skall vid 300 varv pr minut överföra 10 hkr. Beräkna axeln för vridning, om vridningspåkänningen får uppgå till 120 kg/cm².

---

7. Huru tillgår grundförstärkning genom pålning?
8. Nyare isolationsmaterial för byggnadsändamål.
9. Visa sektion av några olika typer av väggar till bostadshus av trä. Utsätt förklarande beteckningar på skissen.

Resultat: **2.** 21,6 kW. **3.** Exempelvis 600 och 250 mm. **4.** 1 110 kgcm. **5.** 126,7 kg per timme. **6.** 4,65 cm.

[1] Tid: 6 tim. Tillåtna hjälpmedel: vissa handböcker och lektionsanteckningar. För betyget godkänd fordras, att minst två av uppgifterna 1—6 och minst en av uppgifterna 7—9 äro nöjaktigt behandlade.

TIDSKRIFT
FÖR
ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1937